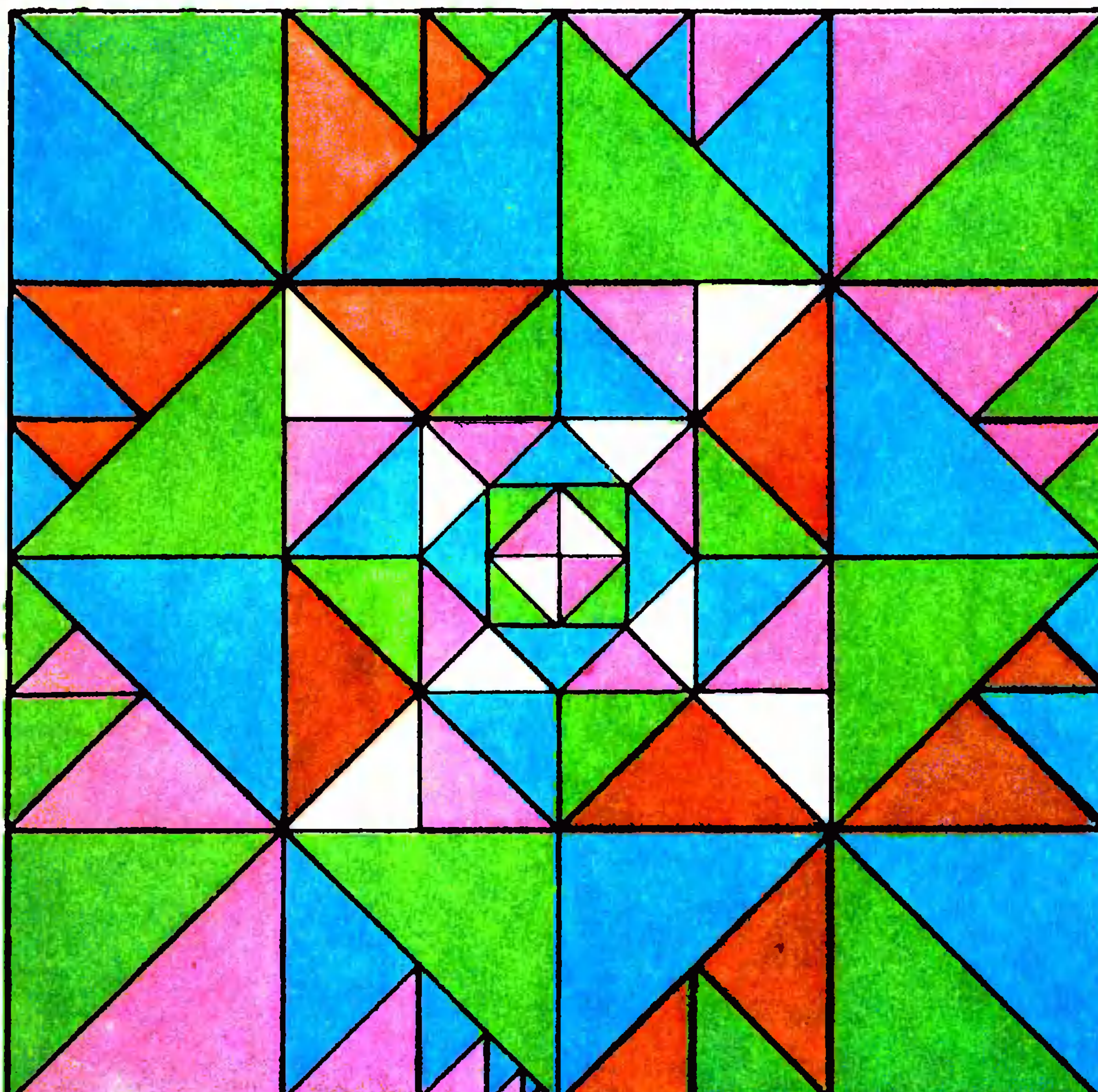
квант

10
ОКТЯБРЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Как видно из рисунка, помещенного на первой странице обложки, квадрат (и вообще любой прямоугольник) можно разбить на любое число подобных треугольников. Если же требовать, чтобы все фигуры разбиения были непременно равными, то прямоугольник (и любой параллелограмм) удается разбить лишь на четное число треугольников (см. рисунок слева). В статье «Конечные паркеты» (стр. 25) подробно рассказывается о закономерностях, которым подчиняются такого рода «паркеты», и приводятся любопытные примеры фигур, разрезаемых на любое число равных треугольников.

Заведующая редакцией *Л. В. Чернова* Главный художник *А. И. Климанов* Художественный редактор *О. Н. Яковлева* Корректор *В. П. Сорокина* Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11, 234-07-93

Сдано в набор 15/VII 1972 г. Подписано в печать 6/IX 1972 г. Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5 Усл. печ. л. Уч.-изд. л. 7,23 Тираж 313 135 экз. Т-03378 Цена 30 коп. Зак. 1236.
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов, Московской области

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

КВАНТ

10
ОКТЯБРЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

МАЛАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

С. Г. Гиндикин

Эта теорема, которая заслуживает величайшего внимания как вследствие ее изящества, так и ввиду ее выдающейся пользы, обычно называется — по имени нашедшего ее математика — теоремой Ферма.

ГАУСС

Бесконечные периодические дроби

Вы, вероятно, помните, что если обращать дробь $\frac{m}{n}$ в десятичную, то есть делить m на n, вычисляя последовательно десятичные знаки, то, начиная с некоторого места, эти знаки начнут периодически повторяться.

Известно, что Гаусс, еще будучи гимназистом, долгое время занимался тем, что обращал дроби $\frac{1}{p}$, где p — последовательные простые числа, не равные 2 и 5, в бесконечные десятичные; в каждом случае он с поразительным терпением ожидал, когда знаки начнут повторяться. Ему хотелось понять, как зависит длина периода λ от p. В таблице 1 показано, какая картина получается для простых чисел $p<50$.

Мы видим, что выписывание полного периода, скажем, для $p=47$ — утомительное занятие (46 знаков!). Да и простой закономерности подметить не удается. Однако Гаусс не терял надежды и продолжал вычисления; он выписал полные периоды для всех простых чисел, не превосходящих 1000. Сделать это было не просто, так как, например, для $p=337$ — $\lambda=336$. Хотя простого способа находить λ по p Гауссу обнаружить не удалось, ряд важных наблюдений был сделан. Главное, что удалось подметить, — это то, что λ *всегда является делителем* $p-1$, иногда совпадая с ним ($p=7$, 17, 23, . . .).

Попытаемся теперь обосновать сделанные утверждения. Мы будем иметь дело лишь с чисто периодическими дробями $0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots\alpha_k\ldots$ Число l называется *длиной периода*, если $\alpha_{k+l}=\alpha_k$ для всех k. Длина периода определяется неоднозначно, например, вместе с l этим свойством обладают все его кратные ql. Пусть λ — *минимальная* длина периода (в любой совокупности натуральных чисел существует наименьшее). В таблице 1 указаны значения минимальных длин периодов. Покажем, что всякая длина периода l делится на минимальную λ.

Разделим l на λ с остатком: $l=q\lambda+r$, $0\leqslant r<\lambda$. Поскольку λ, λq, l — длины периодов, то для всех k имеем: $\alpha_{k+r}=\alpha_{k+r+\lambda q}=\alpha_{k+l}=\alpha_k$, то есть если $r>0$, то r — длина периода, чего не может быть, так как $r<\lambda$. Значит, $r=0$.

Таблица 1

p	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
λ	1	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5	21	46

Длина периода λ бесконечной десятичной дроби, равной $1/p$ ($p<50$).

Докажем теперь чистую периодичность бесконечной десятичной дроби, соответствующей $\frac{1}{p}$ ($p \neq 2,5$). Вспомним, как строится эта дробь. Остаток a_k, полученный на k-м шаге, умножается на 10 и делится с остатком на p; частное α_{k+1} является $(k+1)$-м знаком дроби, а остаток a_{k+1} используется на следующем шаге. Мы начинаем с $a_0 = 1$. Удобно заметить, что если разделить с остатком 10^k на p, то получится частное $\alpha_1\alpha_2 \ldots \ldots \alpha_k$ и остаток a_k (докажите!). Остаток a_k полностью определяет все последующие знаки $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots$, и если два остатка совпали: $a_k = a_m$, то соответствующие знаки α_n повторяются: $\alpha_{k+1} = \alpha_{m+1}$, $\alpha_{k+2} = \alpha_{m+2}$ и т. д. Тогда *для доказательства чистой периодичности достаточно показать, что на каком-то шаге получится остаток* $a_l = 1$. Остатки обязаны повторяться ($a_k = a_m$ для некоторых $k \neq m$), так как $1 \leqslant a_k \leqslant \leqslant p-1$. Более того, всегда можно выбрать k, m так, чтобы $1 \leqslant k < < m \leqslant p$, то есть первое повторение наступит не позднее, чем на p-м шаге. Пусть 10^k и 10^m, $k < m$, дают при делении на p одинаковые остатки. Тогда $10^m - 10^k = 10^k\,(10^{m-k} - 1)$ делится на p. Поскольку p — простое число, отличное от 2 и 5, то первый множитель 10^k не делится на p, а на p должен делиться множитель $10^{m-k} - 1$, то есть 10^{m-k} при делении на p дает остаток 1*). Учитывая, что $1 \leqslant k < m \leqslant p$, получаем $m - k \leqslant \leqslant p - 1$. Итак, *для всякого простого* $p \neq 2$ *и* 5 *существует такое* l, $1 \leqslant l \leqslant p-1$, *что* 10^l *при делении на* p *дает остаток* 1. Это l является длиной периода для $\frac{1}{p}$.

Минимальная длина периода *не превосходит* $p - 1$. Теперь мы хотим показать, что λ — *делитель* $p - 1$. Поскольку λ является делителем любой длины периода, для этого достаточно показать, что $p-1$ — длина периода. Для этого, в свою очередь, покажем, что наименьшее значение k, для которого $10^k - 1$ делится на p, является делителем $p - 1$. Обозначим его через l. Выпишем на карточках числа $1, 2, 3, \ldots, p - 1$. Выберем карточки, на которых написаны остатки от деления чисел $1, 10, 10^2, \ldots, 10^{l-1}$ на p (все эти остатки отличны от нуля). При этом мы выберем l карточек, так как все остатки различны. Действительно, если 10^k, 10^m, $0 \leqslant k < m < l$, имеют одинаковые остатки, то как мы уже отмечали, $10^{m-k}-1$ будет делиться на p, а поскольку $m - k < l$, то мы приходим к противоречию (l — наименьший показатель для которого $10^k - 1$ делится на p). Отметим еще, что 10^{m+l} и 10^m будут иметь при всех m одинаковые остатки от деления на p ($10^{m+l} - - 10^m = 10^m\,(10^l - 1)$ делится на p). Поэтому, рассматривая 10^k при $k \geqslant l$, мы новых остатков не получим. Возьмем теперь одну из невыбранных карточек; пусть на ней написано число b_2. Выберем все карточки, на которых написаны остатки от деления чисел $b_2, b_2 10, b_2 10^2 \ldots, b_2 10^{l-1}$ на p. Как и при $b_1 = 1$, проверяется, что все эти остатки различны. Но теперь нам нужно еще убедиться, что ни одна из нужных нам карточек не была выбрана на первом шаге, то есть числа $b_2 10^k$ и 10^m не могут иметь одинаковые остатки. Предположим, что они имеют одинаковые остатки. Можно считать, что $m \geqslant k$, так как в противном случае можно достаточное число раз прибавить l к m (10^{m+ql} и 10^m имеют одинаковые остатки). Тогда $10^m - b_2 10^k$, а значит, и $10^{m-k} - b_2$ делится на p, то есть b_2 — остаток от деления 10^{m-k} на p, и соответствующую карточку мы должны были выбрать на первом шаге. Мы пришли к противоречию, значит, на втором шаге мы выбираем l новых карточек. Мы будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не

---

*) Мы все время будем пользоваться тем, что если произведение ab делится на простое число p, то на p делится, по крайней мере, один из сомножителей a, b, а также тем, что числа a и b имеют одинаковые остатки от деления на c тогда и только тогда, когда $a-b$ делится на c.

выберем все карточки. Поскольку на каждом шаге выбирается ровно l карточек, мы получаем, что первоначальное число карточек $(p-1)$ *должно делиться на* l.

З а д а ч а 1. *Докажите, что минимальная длина λ периода дроби $\frac{1}{p}$ совпадает с наименьшим показателем l, для которого 10^k-1 делится на p.*

Признаки делимости

Полученные результаты о делимости степеней 10 на p имеют еще одно интересное применение. Оказывается, что для любого простого числа $p \neq 2{,}5$ существует признак делимости, обобщающий признак делимости на 3. Напомним рассуждения, относящиеся к $p = 3$. Пусть A — натуральное число, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ — его цифры, занумерованные справа налево. Тогда $A = a_0 + a_1 10 + \ldots + a_k 10^k$. Поскольку 10^s для всех s при делении на 3 дает остаток 1, то A дает при делении на 3 тот же остаток, что $a_0 + a_1 + \ldots + a_k$. В частности, A будет делиться на 3 в том и только в том случае, когда $a_0 + a_1 + \ldots + a_k$ делится на 3.

Пусть теперь $p = 11$. Тогда, как мы видели, $l = 2$ и все 10^{2k} при делении на 11 дают остаток 1. Разобьем цифры A на пары справа налево, причем в последнюю группу попадает лишь одна цифра, если число цифр нечетно: $b_0 = a_1a_0$, $b_1 = a_3a_2, \ldots$ Число A следующим образом записывается через b_j: $A = b_0 + b_1 10^2 + b_2 10^4 + \ldots + b_m 10^{2m}$, $0 \leqslant b_j < 100$. Ясно, что A при делении на 11 будет давать тот же остаток, что и сумма двузначных чисел $b_0 + b_1 + \ldots + b_m$.

В общем случае, если $p \neq 2, 5$ — простое число и $10^l - 1$ делится на p, мы разобьем A на l-значные блоки справа налево (в первом слева блоке может быть меньше цифр) так, что $A = c_0 + c_1 10^l + c_2 10^{2l} + \ldots + c_n 10^{nl}$, $0 \leqslant c_j < 10^l$. Тогда A *при делении на p дает тот же остаток, что и сумма l-значных чисел* $c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n$; в частности, *$A$ делится на p тогда и только тогда, когда эта сумма делится на p*. Этот признак очень прост при $p = 3$; мы видели, что при $p = 11$ приходится разбивать на двузначные блоки, при $p = 37$ — на трехзначные, однако при $p = 7$ — на шестизначные, и вообще говоря, мы можем гарантировать лишь, что приведет к цели разбиение на блоки длины $p - 1$.

З а д а ч а 2. *Доказать, что если $l = 1$ для некоторого простого p, то $p = 3$; если $l = 2$, то $p = 11$; если $l = 3$, то $p = 37$.*

Малая теорема Ферма

Если вы просмотрите еще раз наши рассуждения о делимости степеней 10 на p, то убедитесь, что мы пользовались лишь тем, что 10 не делится на p. Фактически мы доказали следующее общее утверждение.

М а л а я т е о р е м а Ф е р м а*). *Если p — простое число и a — число, не делящееся на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p.*

Это утверждение было сообщено Ферма (1601—1665) без доказательства в письме Френиклю де Бесси от 18 октября 1640 года. На Ферма обнаруженная им закономерность произвела очень большое впечатление. «Меня озарило ярким светом», — писал он, сообщая о нем.

З а д а ч а 3. *Докажите, что если p — простое число, то $a^p - a$ делится на p.*

Эта задача — вариант малой теоремы Ферма, в котором не исключаются a, кратные p.

Теория сравнений

При исследовании делимости целых чисел удобно пользоваться языком теории сравнений, введенным Гауссом. Целые числа a и b называются *сравнимыми по модулю m* (m — натуральное число), если $a - b$ делится на m. Это обозначается так:

$$a \equiv b \pmod{m}. \qquad (1)$$

*) Она так называется в отличие от до сих пор не доказанной Великой теоремы Ферма (см. «Квант» № 8, 1972 года).

В частности, если a делится на m, то $a \equiv 0 \pmod{m}$. Соотношение (1) равносильно тому, что a и b имеют одинаковые остатки при делении на m. Напомним, что под *остатком* от деления a на m понимается такое r, $0 \leqslant r < m$, что $a = mq + r$, где q — целое. Этим условием r однозначно определяется. Остатки еще называют *вычетами по модулю* m. Их совокупность $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ мы обозначим через Z_m.

Сравнения по одному модулю можно почленно складывать и перемножать, если $a \equiv c \pmod{m}$, $b \equiv d \pmod{m}$, то $a + b \equiv c + d \pmod{m}$, $ab \equiv cd \pmod{m}$. Это легко проверяется непосредственно. Если $a - c$ и $b - d$ делятся на m, то на m делится их сумма

$$a - c + b - d = (a + b) - (c + d),$$

а также выражение

$$ab - cd = ab - cb + bc - cd = \\ = b(a - c) + c(b - d).$$

На языке остатков это означает, что *остаток* суммы $a + b$ *зависит только от остатков* r_1 и r_2 *слагаемых и совпадает с остатком числа* $r_1 + r_2$; аналогично, *остаток* ab *зависит только от* r_1 *и* r_2 *и равен остатку* $r_1 r_2$. В результате в множестве Z_m возникают операции, которые будем называть соответственно *сложением* и *умножением по модулю* m (или *сложением* и *умножением в* m*-арифметике*).

Итак, чтобы выполнить одну из этих операций в Z_m, *нужно выполнить эти операции в обычном смысле и взять остаток от деления результата на* m. Аналогичным образом определяется вычитание в Z_m (остаток обычной разности). Непосредственно проверяется, что и в m-арифметике вычитание — действие, обратное сложению, то есть

$$a + b = c \Longleftrightarrow c - b = a;$$

$$a,\ b,\ c \in Z_m \text{ (докажите!)}.$$

Заметим, что

$$0 - a = m - a \text{ в } Z_m,$$

$$a - b = a + (m - b).$$

Таблица 2

$\boxed{a+b}$

$b \backslash a$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\boxed{ab}$

$b \backslash a$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\boxed{a-b}$

$b \backslash a$	0	1	2
0	0	1	2
1	2	0	1
2	1	2	0

Сложение, умножение и вычитание по модулю 3 (в 3-арифметике).

Задача 4. *Составить таблицы сложения, умножения и вычитания в 5-арифметике, воспользовавшись таблицей 2 как образцом.*

В теории сравнений особое место занимают *сравнения по простому модулю*. Один из самых замечательных фактов, имеющих место для этого случая, заключается в том, что *в* p-арифметике (p — простое) *всегда однозначно выполнено деление на* $b \neq 0$. Покажем это.

Деление мы определяем как действие, обратное умножению, то есть в Z_p $\frac{a}{b} = c$, если $bc = a$.

Ясно, что случай $b = 0$ надо исключить, так как $0c = 0$ при всех c. Пусть $b \neq 0$. Рассмотрим все элементы Z_p вида xb, $x \in Z_p$. Покажем, что при разных x эти элементы различны, то есть что если $0 \leqslant x_2 < x_1 < p$, то $x_1 b - x_2 b = b(x_1 - x_2)$ не делится на p. Действительно, ни b, $0 < b < p$, ни $x_1 - x_2$, $0 < x_1 - x_2 < p$, не делятся на p. Значит, множество xb, $x \in Z_p$, содержит p различных элементов, а потому совпадает с Z_p.

Таким образом, для всякого $a \in Z_p$ существует и единственно значение $x = c$, для которого $cb = a$.

Полученный результат можно переформулировать так: *сравнение $ax \equiv b \pmod p$ при $a \not\equiv 0 \pmod p$ имеет решение, причем все решения сравнимы по модулю p.*

Задача 5. *Составьте таблицу деления в 5-арифметике.*

Задача 6. *Покажите, что если все элементы Z_m делятся на $b \in Z_m$, то b и m взаимно просты (то есть их наибольший общий делитель $(b, m) = 1$). В частности, если в Z_m всегда выполнимо деление на ненулевые элементы, то m — простое число.*

Задача 7. *Пусть последняя цифра b отлична от 0, 2 и 5. Тогда для любой цифры c можно указать число, делящееся на b и имеющее данную цифру с последней.*

В силу малой теоремы Ферма $a^{p-1} = 1$ в Z_p при $a \neq 0$, что эквивалентно сравнению $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ для a, не делящихся на p. Эйлер заметил, что теорема Ферма допускает обобщение на случай составного m. Пусть a взаимно просто с m. Так же как и для простого p, показывается, что $a^k - 1$ для некоторого k делится на m. Пусть l — наименьший показатель, обладающий этим свойством; принято говорить, что *a принадлежит показателю l по модулю m.*

Теорема Ферма—Эйлера. *Пусть a взаимно просто с m. Тогда*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m, \qquad (2)$$

где $\varphi(m)$ — число элементов в Z_m, взаимно простых с m.

Величина $\varphi(m)$ называется *функцией Эйлера* (таблица 3).

Доказательство в точности повторяет рассуждение для простого $m = p$. Нужно выписать на карточках $\varphi(m)$ чисел, взаимно простых с m и меньших m, а затем на каждом шаге вместе с одной из оставшихся карточек с числом b_j мы выберем карточки, на которых выписаны остатки от деления $b_j, b_j a, \ldots, b_j a^{l-1}$ на m. При этом на каждом шаге будет выбираться точно l карточек, а в результате $\varphi(m)$ должно делиться на l.

Подумайте, что можно сказать, основываясь на теореме Ферма—Эйлера о периоде дробей $1/m$ и о признаках делимости на m, где m — составное число.

Вычисление функции Эйлера

Разложим m на простые множители: $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, $\alpha_j > 0$. Тогда $\varphi(m)$ — количество натуральных чисел k, $0 \leqslant k < m$, которые не делятся ни на одно из простых чисел $p_1, \ldots, p_r$. Нам будет удобно вычислить выражение, более общее, чем $\varphi(m)$. Пусть m_1 и m_2 — взаимно простые делители m и $\psi(m_1/m_2)$ — число таких k, $0 \leqslant k < m$, которые делятся на m_1, но взаимно просты с m_2. Тогда $\psi(1/m) = \varphi(m)$.

Если $m_2 = q_1^{\beta_1} \ldots q_s^{\beta_s}$, $\beta_j > 0$, $m_2' = q_1 \ldots q_s$, то $\psi(m_1/m_2) = \psi(m_1/m_2')$ (почему?). Далее ясно, что $\psi(m_1/1)$ — это количество чисел

Таблица 3

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varphi(m)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12

Значение функции Эйлера. Проверьте, что $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ и что сумма $\varphi(d)$ по всем делителям d данного числа m равна m.

k, $0 \leqslant k < m$, делящихся на m_1 (1 взаимно проста со всеми k), а потому $\psi(m_1/1) = \frac{m}{m_1}$. Пусть теперь p — простой делитель m, на который не делятся m_1 и m_2. Тогда $\psi(m_1/m_2p) = \psi(m_1/m_2) - \psi(m_1p/m_2)$, поскольку если из совокупности чисел, делящихся на m_1 и взаимно простых с m_2, отбросить числа, делящиеся на p, то мы получим совокупность чисел, делящихся на m_1 и взаимно простых с m_2p. В результате получаем индуктивный способ вычислять $\psi(m_1/m_2)$:

$$\psi(m_1/q_1) = \psi(m_1/1) - \psi(m_1q_1/1) = \frac{m}{m_1} - \frac{m}{m_1q_1} = \frac{m}{m_1}\left(1 - \frac{1}{q_1}\right),$$

$$\psi(m_1/q_1q_2) = \psi(m_1/q_1) - \psi(m_1q_2/q_1) = \frac{m}{m_1}\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right).$$

Далее по индукции можно доказать, что

$$\psi(m_1/q_1\ldots q_s) = \frac{m}{m_1}\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{q_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{q_s}\right),$$

где $q_1, \ldots, q_s$ — различные простые делители m, на которые не делится m_1. В частности, учитывая, что $\varphi(m) = \psi(1/m) = \psi(1/p_1 \ldots p_r)$, получаем:

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right). \quad (3)$$

Отметим, что естественно положить $\varphi(1) = 1$

Задача 8. *Докажите, что если m_1 и m_2 взаимно просты, то*

$$\varphi(m_1m_2) = \varphi(m_1)\cdot\varphi(m_2).$$

Это свойство называется свойством *мультипликативности* функции Эйлера.

Еще одно свойство функции Эйлера было впервые замечено Гауссом. Пусть $d_1, \ldots, d_k$ — все различные делители числа m (включая 1 и m). Тогда

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_k) = m. \quad (4)$$

Для доказательства формулы Гаусса (4) разобьем все числа 1, 2, ..., m на группы $D_1, D_2, \ldots, D_k$, относя n в группу D_s, если $(n, m) = l_s = \frac{m}{d_s}$. Тогда каждое из наших m чисел попадет в одну и только одну группу, причем в D_s попадет ровно $\varphi(d_s)$ элементов. Действительно, $n \in D_s$ тогда и только тогда, когда $n = l_sq$, $1 \leqslant q \leqslant d_s$, причем q взаимно просто с d_s, то есть q пробегает $\varphi(d_s)$ значений. Суммируя число элементов по группам, получаем (4).

Первообразные корни

Число g, не делящееся на p (p — простое число), называется *первообразным корнем* по модулю p, если оно принадлежит показателю $p-1$ по модулю p, то есть если (см. определение на стр. 6) наименьшее k, при котором $a^k - 1$ делится на p, равно $p-1$.

Мы видели, что для тех p, для которых 10 является первообразным корнем (7, 17, 19, 23, ...), период $\frac{1}{p}$ имел максимально возможную длину $p-1$, а в признаках делимости приходилось разбивать числа на блоки длины $p-1$.

Для всякого ли p существует хотя бы один первообразный корень? Первым, кто пытался дать ответ на этот вопрос, был Эйлер, но полные доказательства были получены лишь Лежандром (1752—1833) и Гауссом. Мы воспроизведем здесь рассуждение Гаусса, в котором находится одновременно точное число первообразных корней и, более того, число элементов Z_p, принадлежащих показателю l для произвольного l.

Нам потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть $P(x)$ — многочлен степени l и имеется более l различных* целых r, $0 \leqslant r < p$, *для которых $P(r)$ делится на p. Тогда $P(r) \equiv 0 \pmod p$ для всех r.*

Доказательство будем вести индукцией по l. При $l = 0$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для многочленов степени не выше $l-1$. Пусть далее $r_0, r_1, \ldots, r_l$, $0 \leqslant r_j < p$, удовлетворяют сравнению $P(r) \equiv 0 \pmod p$. Представим $P(x)$ в виде $P(x) = (x - r_0) Q(x) + P(r_0)$, где $Q(x)$ — многочлен степени $l-1$, а $P(r_0)$ делится на p. Тогда, поскольку $P(r_j)$ делятся на p, $(r_j - r_0) Q(r_j)$ делится на p при $1 \leqslant j \leqslant l$. Так как $r_j - r_0$ не может делиться на p, то $Q(r_j)$ делится на p, а тогда по предположению индукции $Q(r)$ будет делиться на p при всех r. Следовательно, $P(r)$ делится на p при всех r.

Следствие. *Сравнению $x^l \equiv 1 \pmod p$ удовлетворяют не более l элементов Z_p.*

В силу леммы достаточно найти хотя бы одно $x \in Z_p$, не удовлеторяющее сравнению. Можно взять $x = 0$.

Теорема Гаусса. *Пусть p — простое число, l — делитель $(p-1)$. Тогда показателю l принадлежит $\varphi(l)$ элементов Z_p.*

Следствие. *Для всякого простого p имеется $\varphi(p-1)$ первообразных корней* (см. табл. 4).

Доказательство теоремы Гаусса. Пусть показателю l (l — делитель $p-1$) принадлежит некоторое $a \in Z_p$. Рассмотрим числа $1, a, \ldots, a^{l-1}$ и их остатки $b_0, b_1, \ldots, b_{l-1}$. Уже было показано, что все b_j различны. Ясно, что для любого m имеем:

$$(a^m)^l \equiv (b_m)^l \equiv 1 \pmod p,$$

то есть $b_0, b_1, \ldots, b_{l-1}$ — решения сравнения $x^l \equiv 1 \pmod p$, причем в силу следствия из леммы других решений у этого сравнения нет. В частности, среди $b_0, \ldots, b_{l-1}$ содержатся все остатки, принадлежащие показателю l. Очевидно, что если m и l имеют общий делитель $d \neq 1$, то $(a^m)^{l/d} \equiv 1 \pmod p$, так что b_m не может принадлежать показателю l, а поэтому показателю l может принадлежать не более $\varphi(l)$ элементов Z_p.

Каждый из $p-1$ ненулевых элементов Z_p принадлежит какому-то показателю l, являющемуся делителем $p-1$. Пусть $d_1, \ldots, d_k$ — делители $p-1$ и показателю d_s принадлежит $\psi(d_s)$ элементов Z_p. Тогда $\psi(d_1) + \ldots + \psi(d_k) = p - 1$ и $\psi(d_s) \leqslant \varphi(d_s)$ для всех s. В силу формулы Гаусса (4) $\varphi(d_1) + \ldots + \varphi(d_k) = p - 1$, поэтому $\psi(d_s) + \ldots + \psi(d_k) = \varphi(d_1) + \ldots + \varphi(d_k)$, и, поскольку $\psi(d_s) \leqslant \varphi(d_s)$, обязательно $\psi(d_s) = \varphi(d_s)$ для всех s. Теорема доказана.

Таблица 4

$a \backslash k$ (a^k)	1	2	3	4	5	6	7	$l(a)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	1	2	4	1	2	3
3	3	2	6	4	5	1	3	6
4	4	2	1	4	2	1	4	3
5	5	4	6	2	3	1	5	6
6	6	1	6	1	6	1	6	2

Степени по модулю 7. В последнем столбце для каждого остатка x указано, какому показателю по модулю 7 он принадлежит: 2 остатка принадлежат показателю 6($f(6) = 2$), то есть являются первообразными корнями, 2 — показателю 3($f(3) = 2$), 1 — показателю 2($f(2) = 1$).

Таблица 5

a	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{ind}_3 a$	0	2	1	4	5	3

Индексы в Z_7 — относительно первообразного корня 3.

Приведенное доказательство — типичное доказательство существования. В нем доказывается существование $\varphi(l)$ элементов Z_p, принадлежащих показателю l, в частности, $\varphi(p-1)$ первообразных корней, но явное построение не проводится.

Первообразные корни существуют не только для простых чисел. Можно показать, что они существуют для чисел 2, 4, p^α, $2p^\alpha$, где p — нечетное простое число, и только для них.

Индексы

Применение первообразных корней основано на следующем факте. Пусть g — первообразный корень по модулю p; $a_0, a_1, \ldots, a_{p-2}$ — остатки от деления чисел $1, g, g^2, \ldots, g^{p-2}$ на p. Тогда все a_j различны и все они отличны от нуля: следовательно, $a_0, \ldots, a_{p-2}$ — это все ненулевые элементы Z_p. В результате всякому ненулевому элементу $b \in Z_p$ отвечает единственное $k \in Z_{p-1}$, для которого $g^k \equiv b \pmod p$; k называется *индексом* b относительно g и обозначается через $\mathrm{ind}_g b$ (табл. 5). Очевидно, что $\mathrm{ind}_g ab = \mathrm{ind}_g a + \mathrm{ind}_g b$; $\mathrm{ind}_g \frac{a}{b} = \mathrm{ind}_g a - \mathrm{ind}_g b$, где слева операции производятся в Z_p, а справа в Z_{p-1}. По этой причине индексы в p-арифметике играют роль, аналогичную логарифмам; при их помощи умножение и деление сводятся к сложению и умножению. В учебниках по теории чисел приводятся подробные таблицы индексов, причем, как и в логарифмических таблицах, приводятся как таблицы для определения индексов по элементам Z_p, так и таблицы для определения элементов по индексам.

Задача 9. *Составить таблицы индексов в 5-арифметике.*

Мы ограничимся одним примером на применение индексов. Рассмотрим сравнение $ax^l \equiv b \pmod p$, $(a, p) = 1$. Вопрос о его разрешимости можно исследовать непосредственно, но если перейти к индексам, то мы получаем относительно $y = \mathrm{ind}_g x$ сравнение первой степени: $ly = c \pmod{p-1}$, $c = \mathrm{ind}_g b - \mathrm{ind}_g a$. Поскольку между ненулевыми остатками и индексами существует взаимно однозначное соответствие, такое же соответствие существует между ненулевыми решениями первого сравнения и решениями второго.

Задача 10. *Покажите, что сравнение $ax^l \equiv b \pmod p$, $(a, p) = (b, p) = 1$ однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда l и $p-1$ взаимно просты.*

Указание. Воспользуйтесь задачей 6.

Индексы в p-арифметике зависят от выбора первообразного корня g. Однако наибольший общий делитель $d(a) = (\mathrm{ind}_g a, p-1)$ не зависит от g, что следует из следующего утверждения.

Задача 11. *Докажите, что имеет место соотношение $d(a)l(a) = p-1$, где $l(a)$ — показатель, которому принадлежит a по модулю p.*

Указание. Достаточно заметить, что $l(a)$ — это наименьшее натуральное число, для которого $l(a)\ \mathrm{ind}_g a$ делится на $p-1$ ($a^l \equiv g^{l\,\mathrm{ind}\,a} \equiv 1 \pmod p$).

Полученное соотношение позволяет легко найти $l(a)$ по индексу a. В частности, зная индекс 10, в p-арифметике можно найти период $1/p$, не выписывая явно десятичной дроби.

ЗАКОН ДЖОУЛЯ-ЛЕНЦА

В. А. Фабрикант

Нагревание проводника при прохождении электрического тока — один из наиболее привычных эффектов. Однако более внимательный анализ механизма возникновения джоулева тепла показывает, что здесь далеко не все так просто.

В статье рассматриваются явления, связанные с эффектом Джоуля—Ленца. В плазме электрического разряда в газах могут существовать в одном и том же объеме две температуры, отличающиеся в сотни раз. Такая плазма представляет собой как бы смесь двух газов с резко различающимися температурами. Эти температуры не могут стать равными из-за того, что электрическое поле нагревает только один из газов и между газами имеется надежная «шуба».

Инженер, рассчитывающий линию дальней электропередачи, и инженер, создающий мощную электропечь, имеют диаметрально противоположные точки зрения на джоулево тепло, выделяющееся в проводнике при прохождении тока. Для первого это — вредный эффект, заставляющий повышать напряжение и мечтать о сверхпроводящем кабеле; для второго — полезный эффект, позволяющий решать трудные технологические проблемы. Однако оба они согласятся, что эффект этот весьма важный.

Закон, по которому проводник нагревается электрическим током, был впервые экспериментально установлен в 1841—42 гг. английским физиком Джеймсом Джоулем и, независимо от него, несколько позднее (в 1842—43 гг.), но с гораздо большей точностью — петербургским академиком Эмилием Христиановичем Ленцем.

Начав исследовать выделение тепла при прохождении тока, Джоуль увлекся более общей проблемой — преобразованием энергии. В частности, он занялся преобразованием работы в тепло, используя в качестве промежуточного звена электрический ток *).

Для первых опытов Джоуль сделал довольно простой прибор, состоявший из стеклянной банки, наполненной водой, в которую опускалась стеклянная трубка с навитым на нее проводником и с термометром для измерения температуры воды. Источником электродвижущей силы служила батарея гальванических элементов. Измерялось повышение температуры воды за определенный промежуток времени при прохождении тока.

Установив основные закономерности нагревания проводника при прохождении тока, Джоуль пришел к мысли, что этот эффект возникает за счет теплопроводности. Согласно его гипотезе, тепло, выделяющееся в гальванической батарее, вследствие теплопроводности распространяется вдоль проводника и нагревает его.

*) Попутно Джоуль пришел к выводу, что электрические моторы не смогут конкурировать с паровыми машинами из-за дороговизны получения электрического тока! Вывод для середины XIX века вполне обоснованный.

Для проверки этой гипотезы Джоуль построил гораздо более сложный прибор. Вместо гальванической батареи в этом приборе для получения тока использовался индукционный генератор со статором в виде мощного электромагнита, между полюсами которого вращался в сосуде с водой ротор. Измерялся нагрев воды при замкнутой и разомкнутой обмотке ротора. Разность этих нагревов, очевидно, вызывалась тепловым действием тока, индуцированного в обмотке ротора. Джоуль убедился в ошибочности своей гипотезы о роли теплопроводности и пришел к правильному истолкованию явления нагревания проводников *).

Установление точного закона выделения тепла при прохождении электрического тока было далеко не простой экспериментальной задачей для физика первой половины XIX века. Э. Х. Ленц подошел к решению этой задачи с большой тщательностью как первоклассный экспериментатор. Он начал с создания новых измерительных приборов и их калибровки, что потребовало много труда.

В частности, для измерения тока он построил так называемый мультипликатор — прибор, в котором измеряемый ток проходит сквозь неподвижную обмотку, состоящую из нескольких витков провода. В центре обмотки подвешена магнитная стрелка. Поворот стрелки связан с величиной проходящего сквозь обмотку тока. До мультипликаторов применяли приборы с обмоткой, состоявшей из одного витка. Ясно, что чувствительность мультипликаторов была гораздо выше.

Неприятным свойством мультипликаторов было то, что магнитная стрелка около положения равновесия испытывала очень медленно затухающие колебания. Каждый отсчет занимал много времени. Ленц применил успокоитель, прикрепленный к стрелке и опущенный в вязкое масло. Это чрезвычайно ускорило измерения.

На рисунке 1 приведен чертеж, взятый из статьи Ленца и изображающий прибор для определения количества тепла, выделяемого проводником. KL — термометр; вместо воды в сосуд GH был налит спирт. Электропроводность спирта ниже электропроводности воды, это устраняет опасность возникновения токов между витками проволоки.

Для компенсации потерь тепла во внешнюю среду Ленц применил остроумный прием. Прибор заливался спиртом, имевшим температуру более низкую, чем температура окружающего воздуха. После включения тока нагрев производился до температуры, на столько же градусов превышавшей температуру воздуха, на сколько вначале она была ниже. Тогда до выравнивания температур прибора и воздуха тепло идет от воздуха к прибору, а

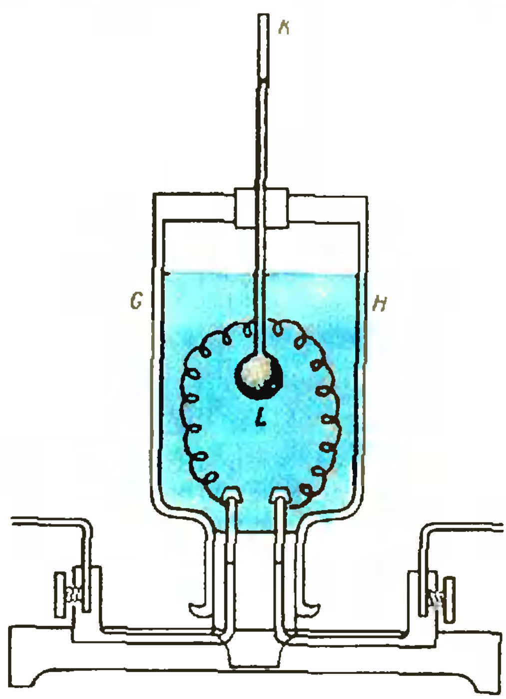


Рис. 1.

*) Нагревание воды при вращении ротора с разомкнутой обмоткой явно натолкнуло Джоуля на идею его знаменитого прибора для определения механического эквивалента теплоты. Опыты Джоуля с этим прибором сыграли большую роль в обосновании закона сохранения энергии. Поэтому единица энергии вполне заслуженно носит его имя.

после выравнивания — от прибора к воздуху. Ленц показал, что таким образом потери тепла компенсируются довольно точно.

Проведя большую серию измерений, Ленц пришел к заключению, что установленные в предварительных опытах Джоуля закономерности выполняются с высокой степенью точности. Он так сформулировал эти закономерности:

«1) Нагревание проволоки гальваническим током пропорционально сопротивлению проволоки.

2) Нагревание проволоки гальваническим током пропорционально квадрату тока, служащего для нагревания» *).

Обе закономерности могут быть объединены в одной формуле Джоуля — Ленца

$$W = RI^2,$$

где W — мощность выделяемого тепла в ваттах, R — сопротивление в омах, I — сила тока в амперах.

Для единицы объема проводника

$$w = \rho j^2,$$

где ρ — удельное сопротивление, j — плотность тока. Используя закон Ома $j = \frac{E}{\rho}$, можно получить:

$$w = jE$$

или

$$w = \sigma E^2.$$

Здесь E — напряженность электрического поля, $\sigma = \frac{1}{\rho}$ — проводимость.

Вывод формулы Джоуля—Ленца

При выводе закона Ома из электронных представлений нас интересует только судьба электронов **). Достаточно учесть, что электроны приобретают дополнительную скорость в электрическом поле, вызывающем ток, и теряют эту скорость при столкновении с атомами. Что происходит с атомами при этих столкновениях — для вывода закона Ома не существенно.

Эффект Джоуля — Ленца, наоборот, состоит в увеличении скорости теплового движения атомов за счет энергии, передаваемой электронами атомам при столкновениях.

Обычно элементарный расчет тепла Джоуля — Ленца проводится следующим образом.

Дополнительная скорость электрона равна произведению ускорения в электрическом поле $\frac{eE}{m}$ на время пролета длины свободного пробега τ (интервал времени между двумя столкновениями):

$$u = \frac{e}{m} E\tau. \qquad (1)$$

Дополнительная кинетическая энергия, соответственно, равна:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^2\tau^2}{m} E^2. \qquad (2)$$

Каждый электрон испытывает в секунду $1/\tau$ столкновений с атомами и при каждом столкновении передает атому энергию, равную $\frac{mu^2}{2}$. В единице объема N электронов. Следовательно, в единице объема происходит N/τ столкновений в секунду и атомам передается энергия, равная:

$$W = \frac{N}{\tau} \frac{mu^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^2N\tau}{m} E^2. \qquad (3)$$

Это и есть мощность, выделяемая в виде тепла.

Так как (см. статью «Закон Ома»)

$$\frac{1}{2} \frac{e^2N\tau}{m} = \sigma \qquad (4)$$

(σ — проводимость), то

$$W = \sigma E^2 = jE. \qquad (5)$$

Мы получили формулу Джоуля — Ленца, исходя из электронных представлений. Все как будто в порядке. Приглядимся, однако, внимательнее к приведенному расчету.

*) Доложено в Российской Академии Наук 11 августа 1843 г.

**) См. статью Я. А. Смородинского «Закон Ома» («Квант» № 4, 1971).

Роль законов сохранения

Во внешне гладком выводе формулы Джоуля — Ленца есть не очень понятное место. Почему электрон при столкновении отдает атому энергию, как раз равную дополнительной энергии, приобретенной в электрическом поле?

Рассмотрим этот вопрос подробнее.

При решении любой физической задачи надо помнить о строгих законах сохранения. Согласно законам сохранения импульса и энергии электрон при столкновении должен отдавать атому вполне определенную долю своей кинетической энергии. Неясно, почему эта доля полной кинетической энергии электрона должна быть как раз равна дополнительной энергии электрона, приобретенной в электрическом поле.

Будем считать, что электроны и атомы сталкиваются как упругие шарики.

Подсчитаем, какую долю полной кинетической энергии должен отдать электрон атому при центральном ударе (рис. 2, *а*).

Пусть до столкновения электрон движется со скоростью v, а атом покоится. Обозначим скорость электрона после столкновения v_1, скорость атома V_1. Тогда по закону сохранения импульса:

$$mv = mv_1 + MV_1, \qquad (6)$$

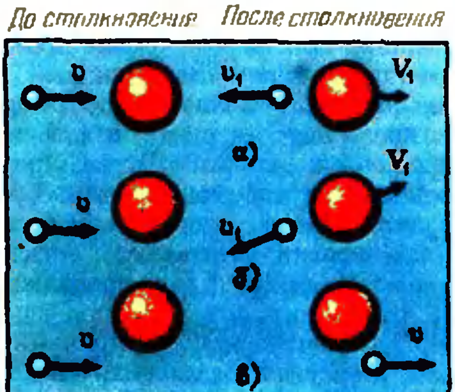


Рис. 2.

а по закону сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV_1^2}{2}. \qquad (7)$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\frac{MV_1^2}{2} = \frac{4Mm}{(m+M)^2}\cdot\frac{mv^2}{2}. \qquad (8)$$

Так как $M \gg m$, в знаменателе можно пренебречь m по сравнению с M. Тогда:

$$\frac{MV_1^2}{2} = \frac{4m}{M}\,\frac{mv^2}{2}. \qquad (9)$$

При нецентральных ударах (рис. 2, *б*) атом будет получать меньшую долю начальной энергии электрона. При пролете электрона по касательной к «поверхности» атома (рис. 2, *в*) передаваемая энергия будет равна нулю. Средняя доля энергии определится как полусумма максимальной доли и нуля, иными словами, она равна половине максимальной доли. Итак, средняя энергия, получаемая атомами от электронов при каждом столкновении, равна

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{2m}{M}\,\frac{mv^2}{2}. \qquad (10)$$

Так как m/M порядка 10^{-3} — 10^{-5}, электрон может отдать атому только ничтожную часть своей полной кинетической энергии. Это и создает своеобразную «шубу», препятствующую обмену энергией между электронами и атомами.

Из обратимости упругих столкновений во времени следует, что атом, налетающий на электрон, сможет отдать электрону только такую же малую часть своей начальной кинетической энергии. Нетрудно в этом убедиться прямым расчетом.

Другой способ вычисления джоулева тепла

В проводнике движутся не только свободные электроны, но и атомы, совершающие хаотические колебания около своих положений равновесия.

Поэтому надо рассматривать столкновения между двумя коллективами движущихся частиц.

При одних столкновениях электроны отдают часть своей энергии атомам, при других, наоборот, атомы отдают часть своей энергии электронам. Благодаря действию электрического поля электроны все время «подогреваются», получая дополнительную энергию. В результате электронный газ имеет несколько более высокую температуру T_e, чем температура атомов T_a. Поэтому, в среднем, электроны отдают атомам бо́льшую энергию, чем получают от них.

Как уже было показано, при каждом столкновении электрон может отдать $2\frac{m}{M}$ своей кинетической энергии. То же относится и к атомам.

Воспользуемся обычным выражением средней энергии частицы через температуру. Тогда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT_e,$$

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{3}{2}kT_a.$$

Поток энергии, определяющий нагрев атомов, равен разности двух потоков энергии — потока, текущего от электронов к атомам, и потока от атомов к электронам. Ясно, что этот результирующий поток энергии должен быть пропорционален числу столкновений электронов с атомами $\frac{N}{\tau}$, коэффициенту передачи энергии $2\frac{m}{M}$ и разности средних энергий электронов и атомов $\frac{3}{2}k(T_e - T_a)$.

Строгий расчет показывает, что никакого численного коэффициента в окончательное выражение для результирующего потока энергии вводить не надо, то есть

$$W = \frac{N}{\tau}\frac{2m}{M}\frac{3}{2}k(T_e - T_a). \qquad (11)$$

В формуле (11) W — это джоулево тепло, но здесь оно выражается иначе, чем в формуле (3).

В отсутствие внешнего электрического поля наступает равновесие между электронами и атомами. Электронная температура равна температуре атомов.

При тепловом равновесии ($T_e = T_a$) результирующий поток энергии должен быть равен нулю. Действие электрического поля на электроны вызывает нарушение этого теплового равновесия.

Приравняем правые части равенств (3) и (11) (мы можем это сделать, так как они характеризуют одну и ту же величину):

$$\frac{1}{2}\frac{e^2}{m}N\tau E^2 = \frac{N}{\tau}\frac{2m}{M}\frac{3}{2}k\,(T_e - T_a). \qquad (12)$$

Отсюда для разности электронной и атомной температур получим:

$$T_e - T_a = \frac{1}{6}\frac{M}{m}\frac{e^2\tau^2}{km}E^2. \qquad (13)$$

Таким образом, в результате действия электрического поля устанавливается определенная разность температур. Мы видим, что эта разность пропорциональна отношению масс M/m.

Это обстоятельство компенсирует обратное отношение масс в формуле (10) и делает законным первоначальный вывод формулы Джоуля — Ленца, в котором M/m не фигурирует вообще.

Следует отметить, что в первые моменты времени после наложения электрического поля на проводник равенство (12) не выполняется. Энергия, полученная электронами от электрического поля, некоторое время превышает энергию, отдаваемую электронами атомам. В результате происходит чрезвычайно быстрый рост T_e, что в свою очередь приводит к росту энергии, отдаваемой электронами атомам. Так будет продолжаться, очевидно, до тех пор, пока энергия, получаемая электронами от поля, и энергия, отдаваемая ими атомам, не сравняются. После этого электроны при столкновениях с атомами будут отдавать им энергию, равную дополнительной кинетической энергии, приобретенной в электрическом поле за время τ между двумя столкновениями. Электронная температура стабилизируется на уровне, определяемом равенством (13).

Примерно то же происходит при отоплении дома зимой. Все тепло, поступающее от отопления в комнаты, уходит сквозь стены дома на улицу. Иначе температура в комнате все время бы повышалась. Отопление необходимо для поддержания перепада температур между комнатами и улицей. Чем меньше теплопроводность стен, тем медленнее тепло уходит из комнаты, тем легче поддерживается перепад температур.

Электронный газ и атомы в проводнике представляют как бы два тела с разными температурами, но перемешанные в одном объеме, причем одно из «тел» подогревается электрическим полем. Тепло, как всегда, переходит от более горячего тела (электронов) к более холодному (атомам).

Теплопроводность «стенки», разделяющей эти два «тела», определяется коэффициентом, стоящим перед разностью температур в формуле (11).

Оценим разность электронной и атомной температур для металлического проводника.

Время τ порядка 10^{-14} *с*, E — порядка 10^{-3} *в/см*. Для разности температур $T_e - T_a$ получаем величину порядка 10^{-9} °C!

Такая ничтожная разность температур достаточна для обеспечения нужного результирующего потока энергии, несмотря на плохой коэффициент передачи энергии при каждом столкновении между электронами и атомами. Объясняется это колоссальным числом столкновений между электронами и атомами: $\frac{N}{\tau}$ порядка 10^{38} c^{-1}.

В полупроводниках и особенно в газовой плазме дело может обстоять совсем иначе.

Неравновесная плазма

Строго говоря, классические электронные представления, использованные нами, не применимы к металлическим проводникам. Поведение электронов в таких проводниках носит сугубо квантовый характер*). Классические представления справедливы в условиях прохождения электрического тока сквозь газы (газовая плазма), но в газах могут иметь место совсем другие соотношения, и законы Ома и Джоуля — Ленца зачастую теряют силу.

При прохождении электрического тока сквозь разреженный газ благодаря большой длине свободного пробега электронов время пробега τ может быть на несколько порядков больше, чем в металлах. Так же на несколько порядков возрастает и E.

В результате электронная температура может достигать десятков тысяч градусов при температуре самого газа (атомов) в несколько сот градусов (например, в люминесцентных или рекламных лампах). Получается смесь двух газов с температурами, отличающимися в десятки и даже сотни раз. Ни о каком тепловом равновесии в таких условиях и речи быть не может. Такая плазма называется неравновесной.

Ясно, что малость отношения m/M благоприятствует установлению большой разности температур электронов и атомов неравновесной плазмы.

В условиях электрического газового разряда низкого давления нарушается закон Ома, так как τ и N зависят от E. Из-за большой энергии электронов могут происходить не только упругие, но и неупругие столкновения электронов с атомами. При неупругих столкновениях кинетическая энергия электронов преобразуется во внутреннюю энергию атомов.

*) См. статью Д. А. Франк-Каменецкого «Электрическое сопротивление — квантовое явление» («Квант» № 9, 1970).

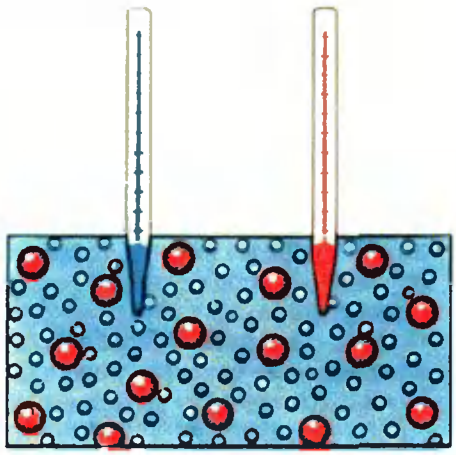


Рис. 3.

Атомы возбуждаются и начинают испускать свет, этим и объясняется свечение газоразрядных ламп. Может происходить даже выбивание внутриатомных электронов (ионизация атомов), что приводит к росту N. При каждом неупругом столкновении электрон теряет гораздо бо́льшую энергию, чем при упругом. Джоулево тепло теперь составляет только часть от полной мощности тока. Иногда джоулево тепло становится даже пренебрежимо малым по сравнению с jE.

Ясно, что в таких случаях формула Джоуля — Ленца неприменима и равенство (12) не выполняется.

Наконец, в некоторых сильноточных разрядных устройствах, создаваемых с целью получения управляемых термоядерных реакций, имеет место обратное соотношение температур (рис. 3). Температура атомов (точнее ионов) оказывается выше электронной температуры. Результирующий поток энергии течет в обратном направлении — от атомов к электронам. В этих условиях электроны не нагревают, а охлаждают атомы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ

Ниже приводятся задачи, предложенные на математическом бое, проводившемся во время слета учащихся физико-математических школ в Ленинграде 7 января 1972 г. (О его правилах рассказано в статье на стр. 71.)

1. Найти целые x и y такие, что $(((x^x-y)^x-y)^x-y)^x+x+y=1972+1000x$.

2. Доказать, что из любых 1972 целых чисел можно выбрать ровно 972, сумма которых делится на 972.

3. Можно ли точки трехмерного пространства раскрасить в три цвета так, чтобы не было ни одного отрезка, целиком закрашенного в один цвет?

4. Доказать, что произведение всех чисел от $n+1$ до $2n$ делится на 2_n и не делится на 2^{n+1}.

5. Построить окружность, которая делит каждую из трех данных равных окружностей на две равные части.

6. Среди треугольников данной площади найти треугольник с наименьшей суммой отношений медиан к соответствующим биссектрисам.

7. Билет имеет шестизначный номер. Билет называется счастливым по-ленинградски, если сумма первых трех его цифр равна сумме трех последних цифр. Билет называется счастливый по-выборгски, если его номер делится на 11. Каких билетов больше: счастливых по-ленинградски или по-выборгски?

8. Можно ли замостить плоскость четырехугольниками, равными данному?

9. Можно ли в сечении куба плоскостью получить правильный пятиугольник?

ИНТЕГРАЛ В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Ю. И. Ионин

В статье «Интеграл» (см. «Квант» № 6, 1972) мы рассказали вам об одном из важнейших разделов математики — интегральном исчислении.

Теперь мы рассмотрим некоторые применения интеграла в геометрии и физике.

§ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

1. Площадь подграфика

Пусть на отрезке $[A, B]$ числовой оси задана числовая функция f, все значения которой неотрицательны. Подграфиком этой функции называют фигуру, ограниченную графиком функции f, осью абсцисс и прямыми $x = A$ и $x = B$ (рис. 1).

Многие геометрические фигуры являются подграфиками или могут быть из них составлены. Так, прямоугольник высоты h, выделяемый неравенствами $0 \leqslant y \leqslant h$, $A \leqslant x \leqslant B$, можно рассматривать как подграфик постоянной функции $x \to h$ (рис. 2). Круг подграфиком не является, но полукруг можно рассматривать как подграфик функции $x = \sqrt{R^2 - x^2}$, определенной на отрезке $[-R, R]$ (рис. 3).

Итак, пусть на отрезке $[A, B]$ определена неотрицательная числовая функция f. Для каждого отрезка $[a, b]$, содержащегося в отрезке $[A, B]$, обозначим через $S\,[a, b]$ площадь части подграфика функции f, заключенной между прямыми $x = a$ и $x = b$. Полученная функция промежутка аддитивна (рис. 4): $S\,[a, b] + S\,[b, c] = S\,[a, c]$.

Часть подграфика, заключенная между прямыми $x = a$ и $x = b$, содержит прямоугольник, основанием которого служит отрезок $[a, b]$, а высота равна $\min\limits_{[a,b]} f$ и содержится в прямоугольнике с тем же основанием и высотой $\max\limits_{[a,b]} f$. Следовательно, число $S\,[a, b]$ заключено между площадями этих прямоугольников (рис. 5)

$$(b - a)\min_{[a,b]} f \leqslant S\,[a, b] \leqslant$$
$$\leqslant (b - a)\max_{[a,b]} f.$$

Рис. 1.

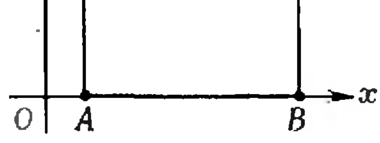


Рис. 2.

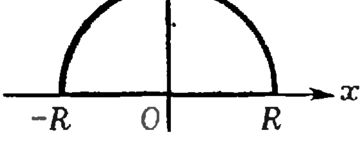


Рис. 3.

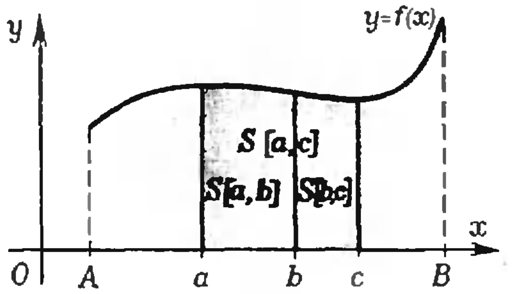


Рис. 4.

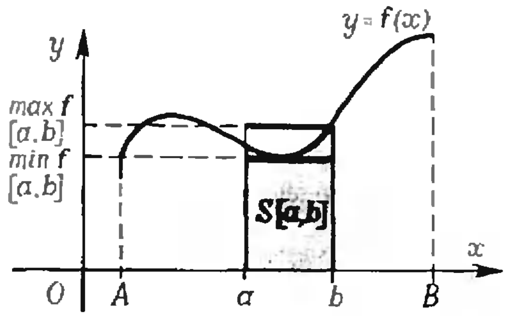


Рис. 5.

Непосредственно из определения интеграла следует, что функция промежутка S — интеграл от числовой функции f. В частности, площадь всего подграфика функции f равна $\int_A^B f(x)\,dx$. Выведенная формула площади подграфика показывает геометрический смысл интеграла: интеграл от неотрицательной функции — это площадь подграфика этой функции. На этом основано использование интеграла для вычисления площадей.

В качестве примера найдем площадь фигуры, отсекаемой от параболы $y=x^2+1$ прямой $y=2x+1$.

Парабола и прямая пересекаются в точках, координаты которых (0, 1) и (2, 5) находятся как решения системы уравнений $y=x^2+1$, $y=2x+1$.

Искомая площадь (рис. 6) равна разности площадей подграфиков функций $x\to 2x+1$ и $x\to x^2+1$, определенных на отрезке $[0, 2]$:

$$S=\int_0^2 (2x+1)\,dx-\int_0^2 (x^2+1)dx=$$

$$=\int_0^2 (2x-x^2)\,dx=2\int_0^2 xdx-\int_0^2 x^2dx=\frac{4}{3}.$$

Вообще, если графики функций f и g пересекаются в точках с абсциссами A и B, а для всех чисел x отрезка $[A, B]$ выполнено неравенство $f(x)\geqslant g(x)$, то площадь фигуры, заключенной между этими подграфиками (рис. 7), равна $\int_A^B (f(x)-g(x))dx$.

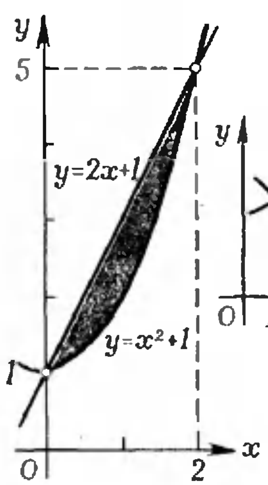


Рис. 6.

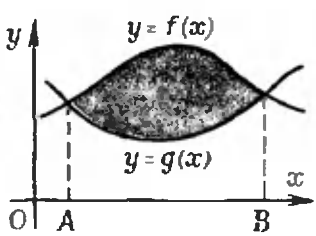


Рис. 7.

Упражнение 1. *а) Вычислить площадь подграфика функций* $x\to x^2$ *на отрезке* $[0,1]$.

б) Вычислить площадь, ограниченную аркой синусоиды и осью абсцисс (рис. 8).

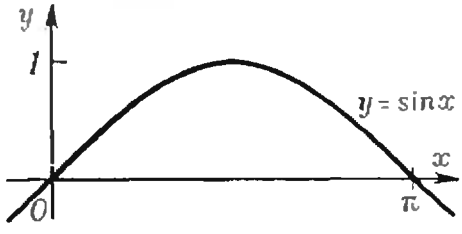


Рис. 8.

2. Объем тела вращения

Предположим, что подграфик неотрицательной функции f, определенной на отрезке $[A, B]$, вращается вокруг оси абсцисс. Каждому отрезку $[a, b]$, содержащемуся в отрезке $[A, B]$, поставим в соответствие число $V[a, b]$ — объем части образовавшегося тела вращения, заключенной между плоскостями $x=a$ и $x=b$ (рис. 9).

Мы получим аддитивную функцию промежутка V.

Из рисунка 9 видно, что выделенная часть тела вращения содержит прямой круговой цилиндр, высотой которого служит отрезок $[a, b]$, а радиус основания равен $\min\limits_{[a,b]} f$ и содержится в цилиндре с той же высотой и радиусом основания $\max\limits_{[a,b]} f$. Так как объемы этих цилиндров равны соответственно $\pi(b-a)(\min\limits_{[a,b]} f)^2$ и $\pi(b-a)(\max\limits_{[a,b]} f)^2$, то

$$\pi(b-a)(\min_{[a,b]} f)^2 \leqslant V[a, b] \leqslant$$
$$\leqslant \pi(b-a)(\max_{[a,b]} f)^2.$$

Но $\pi(\min\limits_{[a,b]} f)^2$ — это наименьшее значение функции πf^2 на отрезке $[a, b]$, а $\pi(\max\limits_{[a,b]} f)^2$ — ее наибольшее значение на этом отрезке. Следовательно, V — интеграл от этой функции, так что объем всего тела вращения равен

$$\int_A^B \pi f^2(x)\, dx.$$

В качестве примера вычислим объем прямого кругового конуса и объем шара.

Прямой круговой конус высоты H можно рассматривать как результат вращения подграфика линейной функции $x \to kx$, определенной на отрезке $[0, H]$ (рис. 10). Если радиус основания конуса равен R, то

$$kH = R,$$

откуда

$$k = \frac{R}{H}.$$

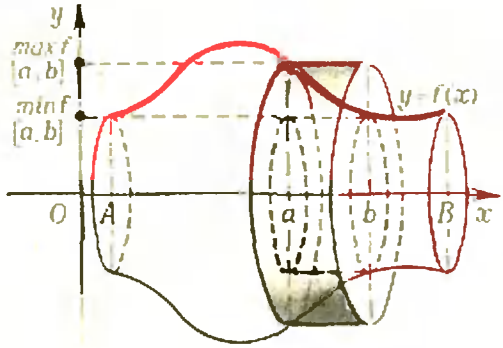


Рис. 9.

Объем конуса равен

$$\int_0^H \pi k^2 x^2 dx = \pi k^2 \int_0^H x^2 dx = \frac{1}{3}\pi k^2 H^3 =$$
$$= \frac{1}{3}\pi \frac{R^2}{H^2} H^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Шар радиуса R получается вращением полукруга того же радиуса вокруг основания.

В подходящим образом выбранной системе координат этот полукруг является подграфиком функции

$$x \to \sqrt{R^2 - x^2}$$

определенной на отрезке $[-R, R]$. Объем шара, следовательно, равен

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx =$$
$$= \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Упражнение 2. *Найти площадь подграфика функции*

$$x \to \cos^2 x$$

на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Упражнение 3. *Найти объем тела, полученного вращением арки синусоиды вокруг оси абсцисс.*

Упражнение 4. *Найти объем тела, полученного вращением графика функции $x \to x^2$ на отрезке $[0, 1]$ вокруг оси ординат.*

Упражнение 5. *Вычислить*

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

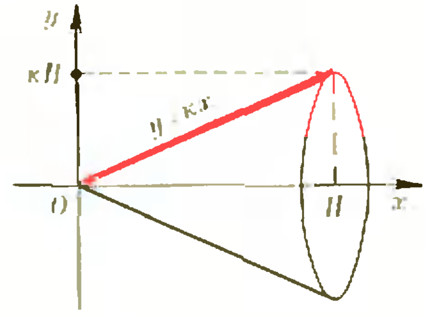


Рис. 10.

§ 2. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

Приведем в заключение несколько примеров применения интеграла в физических задачах.

Задача 1. *Найдите силу гравитационного взаимодействия между расположенными на одной прямой материальной точкой массы m и однородным стержнем длины l и массы M. Расстояние от точки до ближайшего конца стержня равно c.*

Вам, конечно, известен закон всемирного тяготения, утверждающий, что сила гравитационного взаимодействия двух точечных масс прямо пропорциональна произведению этих масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Однако в нашем случае одна из взаимодействующих масс точечной не является.

Если стержень разбить на несколько частей, то сумма сил взаимодействия этих частей с массой m равна силе взаимодействия всего стержня с этой массой. Обычно физики дальше пишут: «разобьем стержень на очень маленькие отрезки длины Δx. На отрезок, находящийся на расстоянии x от точки m, действует сила $\frac{mM\Delta x}{lx^2}$, сумма всех этих сил равна. . .». Покажем, как можно оформлять подобные рассуждения строго, пользуясь нашим определением интеграла.

Прямую, на которой лежат стержень и точка, превратим в числовую ось, выбрав в качестве начальной точку, в которой помещена масса m, и направив ось так, чтобы стержень оказался на положительной полуоси. Стержень займет тогда отрезок $[c, c+l]$ этой оси. Каждому отрезку $[a, b]$, содержащемуся в отрезке $[c, c+l]$, поставим в соответствие число $F[a, b]$ — величину силы взаимодействия между этим отрезком стержня и массой m. Ясно, что F — аддитивная функция промежутка. Ясно, что эта сила увеличится, если всю массу отрезка $[a, b]$, равную $\frac{M}{l}(b-a)$, сконцентрировать в ближайшем к массе m конце a этого отрезка, и уменьшится, если эту массу сконцентрировать в точке b. Но в обоих случаях мы придем к взаимодействию двух точечных масс. В первом случае сила взаимодействия окажется равной $\frac{\gamma mM}{la^2}(b-a)$, во втором случае — $\frac{\gamma mM}{lb^2}(b-a)$. Следовательно,

$$\frac{\gamma mM}{lb^2}(b-a) \leqslant F[a, b] \leqslant \frac{\gamma mM}{la^2}(b-a).$$

Но

$$\frac{\gamma mM}{lb^2} = \min_{[a,\, b]} \frac{\gamma mM}{lx^2}, \quad \text{а} \quad \frac{\gamma mM}{la^2} = \max_{[a,\, b]} \frac{\gamma mM}{lx^2}.$$

Следовательно, аддитивная функция промежутка F — это интеграл от функции $x \to \frac{\gamma mM}{lx^2}$. Вся сила гравитационного притяжения между стержнем и точкой равна

$$\int_c^{c+l} \frac{\gamma mM}{lx^2} dx = \frac{\gamma mM}{l} \int_c^{c+l} x^{-2} dx = \frac{\gamma mM}{l}(-1)\left[(c+l)^{-1} - c^{-1}\right] = \frac{\gamma mM}{l}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+l}\right) = \frac{\gamma mM}{c(c+l)}.$$

Вы знаете, что силу гравитационного притяжения планет также вычисляют по закону всемирного тяготения. Доказательство справедливости для сферических масс той же формулы, что и для точечных, послужило для Ньютона одним из толчков к созданию интегрального исчисления.

Задача 2. *Найти кинетическую энергию однородного диска радиуса R и массы M, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр диска и перпендикулярной его плоскости.*

Кинетическая энергия движущейся точки зависит от массы и скорости. Хотя диск вращается с постоянной угловой скоростью, более удаленные от центра точки имеют большую линейную скорость и, следовательно, большую кинетическую энергию.

Каждому отрезку $[a, b]$, содержащемуся в отрезке $[0, R]$, поставим в соответствие число $K\,[a, b]$ — кинетическую энергию кольца с центром в центре диска, внутренним радиусом a и внешним радиусом b. K — аддитивная функция промежутка.

Кинетическая энергия такого кольца увеличится, если всю его массу сконцентрировать на внешнем ободе кольца, и уменьшится, если эту массу сконцентрировать на внутреннем ободе кольца. Так как точки каждого из этих ободов имеют одну и ту же линейную скорость, то кинетическая энергия в первом случае станет равной $\frac{1}{2}\frac{M}{R^2}(b^2-a^2)(\omega b)^2$, а во втором случае — $\frac{1}{2}\frac{M}{R^2}(b^2-a^2)(\omega a)^2$. Таким образом,

$$\frac{M\omega^2a^2}{2R^2}(b^2-a^2)\leqslant K\,[a, b]\leqslant \leqslant\frac{M\omega^2b^2}{2R^2}(b^2-a^2).$$

Разложим b^2-a^2 на множители и заменим множитель $b+a$ в левой части неравенства на меньшее число $2a$, а в правой части — на большее число $2b$. Получим:

$$\frac{M\omega^2a^3}{R^2}(b-a)\leqslant K\,[a, b]\leqslant \leqslant\frac{M\omega^2b^3}{R^2}(b-a).$$

Но $\frac{M\omega^2a^3}{R^2}=\min\limits_{[a,\,b]}\frac{M\omega^2x^3}{R^2}$, а $\frac{M\omega^2b^3}{R^2}=$ $=\max\limits_{[a,\,b]}\frac{M\omega^2x^3}{R^2}$.

Следовательно, кинетическая энергия диска равна

$$\int_0^R\frac{M\omega^2x^3}{R^2}dx=\frac{M\omega^2}{R^2}\int_0^R x^3dx= =\frac{M\omega^2}{R^2}\cdot\frac{R^4}{4}=\frac{1}{4}M\omega^2R^2.$$

Задача 3. *Найдите путь, пройденный в равноускоренном движении за время t от начала движения, если ускорение равно a, а начальная скорость равна v_0.*

Ответ этой задачи вам хорошо известен. Получим его средствами интегрального исчисления.

Так как скорость в случае движения играет ту же роль, что плотность в случае массы, то путь — это интеграл от скорости. Скорость в момент времени x равна v_0+ax. Следовательно, искомый путь равен

$$\int_0^t(v_0+ax)\,dx=v_0\int_0^t dx+a\int_0^t xdx= =v_0t+\frac{at^2}{2}.$$

Упражнение 6. *Стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через один из его концов, с постоянной угловой скоростью ω. Длина стержня равна l, масса M. Стержень однородный. Найти кинетическую энергию.*

Упражнение 7. *Найти количество тепла, выделяемое переменным синусоидальным током*

$$I\,(t)=I_0\sin(\omega t+\varphi)$$

в течение одного периода в проводнике с сопротивлением R.

ВЫСОТА ГОР И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Этот отрывок взят из лекции известного физика-теоретика В. Вайскопфа, которая была прочитана им в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРН) в 1969 г. Лекция называлась «Современная физика в элементарном изложении». Полностью она была опубликована в журнале «Успехи физических наук», том 103, вып. 1, 1971.

Перевод выполнен В. И. Рыдником.

Мы знаем, что на Земле есть и высокие, и низкие горы. Но почему самая высокая гора (Джомолунгма) имеет высоту лишь около 10 *км*? Почему, скажем, не в пятьдесят раз больше?

В процессах горообразования и выветривания горы разрушаются и многие из них «теряют» высоту. Что, однако, означает существование верхнего «предела» их высоты порядка 10 *км* $= 10^6$ *см*? Оказывается, эта величина определяется самóй физической сущностью твердого вещества скальных пород. Она также связана с такими величинами, как ускорение силы тяжести и число протонов и нейтронов в веществе Земли, составляющее примерно $3\cdot 10^{51}$.

Итак, почему горы не могут расти до сколь угодно большой высоты? Если гора окажется слишком высокой, она начнет «погружаться» в земную кору под ней, поскольку вещества, составляющие земную кору — гранит, кварц, двуокись кремния — не настолько прочны, чтобы «удержать» гору, высота которой больше определенного предела. Вес такой горы окажется столь большим, что нарушит направленность связей между атомами скальных пород, в результате чего породы расплавятся, станут жидкими и получат возможность растекаться в стороны. Это и вызывает опускание горы. По мере погружения горы в земную кору освобождается часть потенциальной энергии горы в земном поле тяготения. Этот излишек переходит в энергию «ожижения» породы.

Пусть первоначально высота горы была h, и гора опустилась на высоту x (см. рисунок 1; сплошной и штриховой линиями показаны начальное и конечное положения горы). Массу горы примем равной M.

Как уже было сказано, уменьшение потенциальной энергии горы в земном поле тяготения равно энергии «ожижения» массы горы, заключенной в объеме высотой x, т. е.

$$Mgx = E_{ож}\cdot nxS,$$

или

$$Mg = E_{ож}\cdot nS, \qquad (1)$$

где n — число молекул в единице объема горы, S — площадь основания горы, $E_{ож}$ — энергия «ожижения» (т. е. скрытая теплота плавления) в расчете на одну молекулу, g — ускорение силы тяжести.

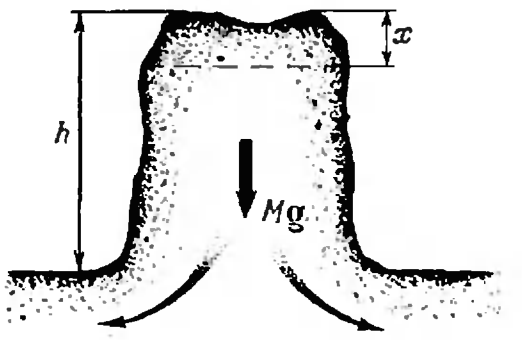


Рис. 1.

Правая часть соотношения (1) имеет определенную величину. Следовательно, для начала «ожижения», т. е. для погружения горы, масса ее M должна быть не меньше некоторого минимального значения. Если M меньше этого критического значения, то гора будет стоять устойчиво. Поэтому массы таких устойчивых гор удовлетворяют условию

$$M \leqslant E_{\text{ож}} \frac{nS}{g}. \qquad (2)$$

Массу горы можно найти по формуле

$$M = hSnm = hSnAm_p,$$

где m — масса молекулы горной породы, A — атомный вес ее, m_p — масса протона, равная $1{,}6 \cdot 10^{-24}$ *г*. Подставляя это выражение для M в соотношение (2), найдем

$$hSnAm_p \leqslant E_{\text{ож}} \frac{nS}{g},$$

то есть

$$h \leqslant \frac{E_{\text{ож}}}{Am_p g}. \qquad (3)$$

Величина h должна быть меньше критического значения $\frac{E_{\text{ож}}}{Am_p g}$; тогда гора не будет «уходить в землю».

Чему равна энергия ожижения $E_{\text{ож}}$? Атомы в жидкости связаны достаточно сильно. Когда твердое тело плавится, связи между атомами в нем почти не рвутся, исчезает лишь их направленность *). Это и обусловливает текучесть жидкости. Твердые тела не могут течь, потому что связи жестко фиксируют атомы относительно их соседей. Энергия, необходимая для нарушения направленности связей, т. е. для плавления, пропорциональна энергии связи атомов B:

$$E_{\text{ож}} = \beta B. \qquad (4)$$

Расчеты для двуокиси кремния SiO_2, составляющего основную часть вещества коры, дают для β значение $\approx 0{,}1$. Величина энергии связи, которая равна энергии, необходимой для вырывания атома из решетки при температуре $T = 0$ °K, для твердых тел заключена в пределах 2,7—11 *эв***). Молекулярный вес SiO_2 $\mu = 60$. Подставляя в формулу (4) численные значения (вместо A следует взять μ), получим оценку для h: $h \leqslant 40$ *км*.

Эта оценка показывает, что горы могут «устоять» на скальном грунте только в том случае, когда они имеют высоту меньше 40 *км*. В действительности этот верхний предел еще меньше, поскольку горы «теплые», и для их ожижения нужна энергия меньшая, чем рассчитанная по формуле (4). Критическая высота гор на других планетах может оказаться иной из-за того, что там ускорение силы тяжести g будет другим. К тому же горы могут быть образованы из других материалов.

Поскольку величина g не является фундаментальной физической постоянной, исключим ее из расчета. Это можно сделать следующим образом. Сила притяжения между

*) Это рассуждение применимо, строго говоря, только к твердым телам с ковалентными (гомеополярными) связями. Силы связи, действующие в металлах, не обладают направленностью. Поэтому металлы «текучи», пластичны уже в обычных условиях, тогда как ковалентные кристаллы (к ним частично относятся и горные породы) приобретают текучесть лишь при больших внешних давлениях. (Примечание переводчика.)

**) Разумеется, при больших температурах для этого требуется меньшая энергия.

частицей массы m на поверхности Земли и Землей массы $M_з$ равна

$$mg=\gamma\frac{M_з m}{R_з^2},$$

где $R_з$ — радиус Земли, γ — гравитационная постоянная. Отсюда

$$g=\gamma\frac{M_з}{R_з^2}. \qquad (5)$$

Если не требовать высокой точности, то величины $M_з$ и $R_з$ можно выразить через число нуклонов $N_з$ в составе Земли. Кора Земли состоит в основном из SiO_2 ($A=60$), а ядро — в основном из железа ($A=57$). Эти два вещества имеют примерно один и тот же атомный вес, а следовательно, и размеры атомов. Если радиусы атомов считать равными a, то объем Земли будет равен

$$\frac{4}{3}\pi R_з^3=\frac{4}{3}\pi\frac{N_з}{A}a^3,$$

откуда

$$R_з=a\left(\frac{N_з}{A}\right)^{1/3}.$$

Подставляя это в выражение (5), получим

$$g=\gamma\frac{M_з}{R_з^2}=\gamma\frac{N_з m_p}{R_з^2}=\gamma N_з\left(\frac{A}{N_з}\right)^{2/3}\frac{m_p}{a^2}. \qquad (6)$$

Радиус атомов твердых веществ в хорошем приближении равен $a=fa_0$, где a_0 — радиус атома водорода, а значение коэффициента f заключено в пределах 1—4. Таким образом,

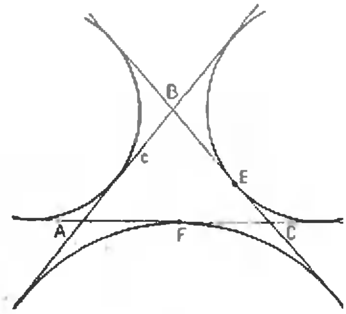
$$g=\gamma N_з\left(\frac{A}{N_з}\right)^{2/3}\frac{m_p}{(fa_0)^2}.$$

В этом выражении неуниверсальной постоянной является число нуклонов $N_з$ в составе Земли *).

*) При оценке высоты гор на других планетах величины A и $N_з$ нельзя считать универсальными константами, так как состав элементов в породах, образующих эти планеты, может быть иным, чем у Земли. (Примечание переводчика.)

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Доказать, что сумма расстояний (на рисунке $CE+CF$) от любой вершины (C) треугольника до точек касания вневписанных окружностей со сторонами,



проходящими через эту вершину, равна третьей стороне ($AB=c$).

С. Н. Федин

ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ

В Глазго (Шотландия) и в Москве бытовал анекдот, который англичане приписывали знаменитому английскому физику лорду Кельвину, а москвичи — профессору Московского университета Николаю Алексеевичу Умову.

На экзамене Умов, якобы, спросил студента: «Что такое электричество?». После долгого раздумья студент ответил: «Простите, профессор, забыл. Сегодня утром помнил, а сейчас забыл».

«Вот, господа,— обратился Умов к другим студентам, — величайшая трагедия физики XIX столетия: единственный человек на свете знал, что такое электричество, да и тот забыл!»

КОНЕЧНЫЕ ПАРКЕТЫ

В. И. Каплун, В. Г. Лейбович, Е. Л. Папернов

Семь раз отмерь — один раз отрежь

Представьте себе, что вы захотели замостить пол в ванной кафельными плитками или сделать обычный паркет в комнате. При этом ставится единственное условие: чтобы плитки (паркетины) были одинаковыми. Первое, что приходит в голову, — попробовать сделать паркет из правильных многоугольников. О таких паркетах можно прочитать в статье А. Н. Колмогорова «Паркеты из правильных многоугольников» *), где рассматривались бесконечные паркеты, то есть плитками покрывалась вся плоскость. Переход к ограниченным областям (таким, как комната) приводит к существенным осложнениям.

Задача 1. *Докажите, что правильными треугольниками или шестиугольниками нельзя замостить прямоугольную комнату.*

Задача 2. *Придумайте пример прямоугольной комнаты, которую нельзя замостить никакими квадратными плитками.*

Как видите, без «неправильных» фигур нам не обойтись. Они часто делают задачу совсем простой. Например, нетрудно подобрать такую прямоугольную плитку, чтобы с ее помощью можно было покрыть данную прямоугольную комнату (рис. 1). В дальнейшем мы узнаем, как замостить паркетом самые разнообразные области. При этом мы будем пользоваться только многоугольными паркетинами и всегда требовать, чтобы в каждом конкретном случае все они были одинаковыми. Заметим, что если мы покрыли паркетом некоторую фигуру, мы одновременно разбили ее отрезками прямых на многоугольники — плитки. Поэтому в дальнейшем мы будет часто употреблять слова *«разбиение»* и *«разрезание»*. Слову «разрезание» мы для удобства изложения придадим специальный смысл: это разбиение, в котором границы плиток образуют отрезки, разрезающие нашу область «насквозь». На рисунке 2 приведен пример разбиения, не являющегося разрезанием, а на рисунке 3 — пример разрезания.

Посмотрим теперь, как можно разрезать прямоугольник на равные треугольники. Это и будет одной из основных наших задач. Например, проведя диагональ, мы разрежем прямоугольник на два равных треугольника.

Задача 3. *Докажите, что произвольный прямоугольник можно разрезать на любое четное число равных треугольников.*

Возникает естественный вопрос: можно ли разрезать прямоугольник на нечетное число равных треугольников? Ответ на этот вопрос будет следовать из более общих результатов, для получения которых мы

*) См. «Квант», № 3, 1970.

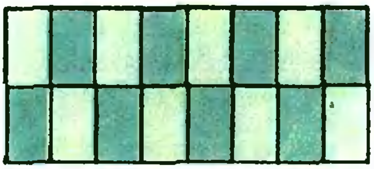


Рис. 1.

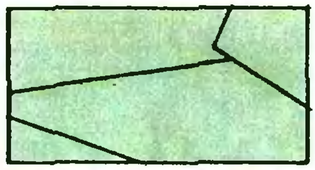


Рис. 2.

Рис. 3.

докажем одну теорему о разрезании бесконечных областей на равные треугольники.

Для ее формулировки нам понадобится одно важное понятие.

Пусть имеется некоторое семейство прямых на плоскости. Будем говорить, что это семейство обладает **системой направляющих**, если на плоскости можно выделить конечное число таких прямых, что каждая прямая из данной совокупности параллельна одной из них. Так например, направления, выделенные красным цветом на рисунке 4, являются направляющими для приведенного на этом рисунке множества прямых.

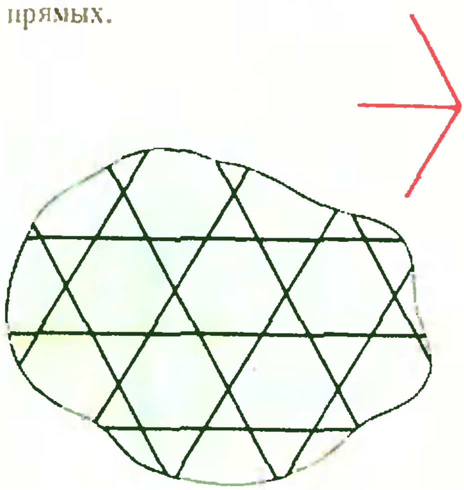


Рис. 4.

Основная Теорема. *Пусть плоскость разрезана на равные треугольники; тогда возможны следующие случаи:*

1) *если треугольники разрезания — прямоугольные с углами 30°, то система направляющих семейства прямых разрезания состоит либо из 3, либо из 4, либо из 6 элементов;*

2) *если треугольники разрезания — прямоугольные, но не являются треугольниками из случая 1, то системы направляющих может состоять только из 3 или 4 элементов;*

3) *наконец, если треугольники разрезания не являются прямоугольными, то направляющих всего 3.*

Отметим одно свойство разрезаний, которое будет играть важную роль в дальнейших рассуждениях.

Пусть имеется произвольный треугольник, входящий в разрезание (ΔABC на рис. 5). Тогда каждая из сторон этого треугольника определяет одну из прямых разрезания. К каждой из этих прямых по другую сторону приложены еще треугольники. Рассмотрим, например, сторону AC треугольника ABC на рисунке 5 и соответствующую ей прямую l (на которой она лежит). Рассмотрим тот из приложенных к AC треугольников, который имеет с AC общие точки, отличные от точек A и C (такой треугольник, очевидно, существует). Тогда этот треугольник — обозначим его $A'B'C'$ — может занимать по отношению к ΔABC только два положения (рис. 5, *а* и *б*). Доказательство этого факта (основанное на равенстве треугольников ABC и $A'B'C'$ и на том, что наше разбиение есть

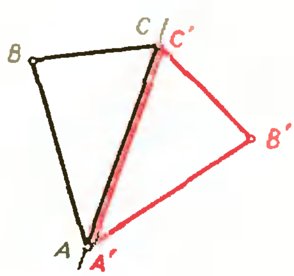


Рис. 5, а.

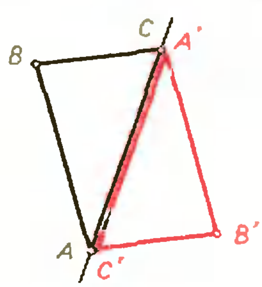


Рис. 5, б.

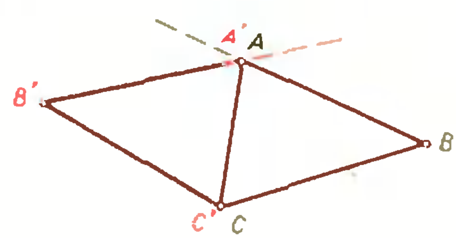


Рис. 6.

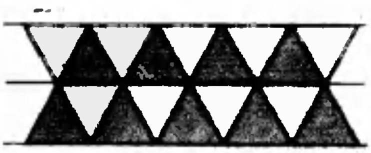


Рис. 7.

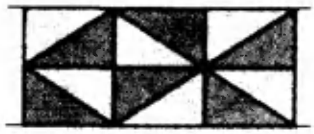


Рис. 8.

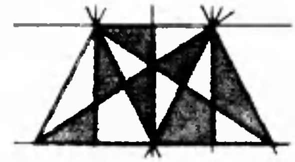


Рис. 9.

разрезание) мы оставляем читателям в виде легкого упражнения, разминки перед более трудными задачами, которые встретятся уже очень скоро.

Теперь можно перейти непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим сначала случай 3. Пусть ABC — произвольный треугольник нашего паркета (рис. 6). Пусть, для определенности, угол A у него наибольший (в случае равнобедренного или равностороннего треугольника можно, как будет ясно из дальнейшего, брать произвольный из соответствующих углов). Покажем, что второй треугольник, приложенный к стороне, содержащей вершину A, может образовывать только конфигурацию, представленную на рисунке 5, *б* (в дальнейшем будем писать просто «приложен по типу «б»»). Действительно, так как угол A наибольший, то $\measuredangle A \geqslant 60°$. Следовательно, если треугольник $A'B'C'$ приложен по типу «а», то к другой стороне, содержащей вершину A, приложить треугольник уже нельзя. Доказательство этого несложного факта оставляем читателю. Отдельно рассмотрите случай $\measuredangle A = 60°$.

Отсюда следует (это тоже задача), что паркет может выглядеть только как на рисунке 7 (часть треугольников на нем закрашена для наглядности).

Переходим к случаю 2. Очевидно, что здесь можно составить такой же паркет, как в случае 3. Но в этом случае можно построить еще ровно один (задача!) паркет (см. рис. 8).

В случае 1, конечно, могут быть реализованы оба паркета случая 2 и еще один паркет (опять задача!), который приведен на рисунке 9.

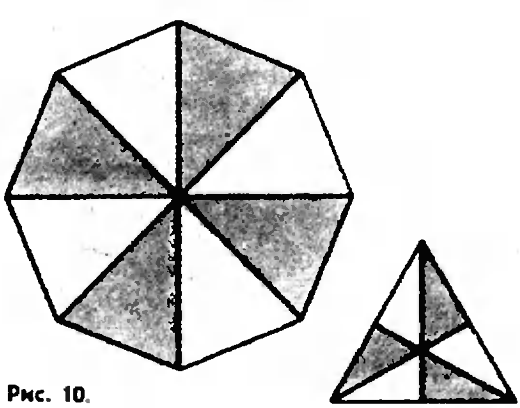


Рис. 10.

Теперь, имея в руках теорему о бесконечных паркетах, можно рассмотреть и разрезания конечных фигур.

Теорема 1. *Если квадрат разрезан на равные треугольники, то треугольники эти — непременно прямоугольные и их четное число.*

Действительно, конечный паркет является либо частью одного из бесконечных, изображенных на рисунках 7—9, либо имеет вид правильного n-угольника (это задача) (рис. 10).

В квадратной комнате, очевидно, треугольный паркет может иметь вид, только как на рисунках 7—9. Но стороны квадрата сами обязаны быть прямыми разрезания, так что случай 3 отпадает. Следовательно, разбиение состоит из прямоугольных треугольников. (Заметим, что когда треугольники на рис. 8 — равнобедренные, мы получаем паркет типа рис. 10.). Если паркет имеет вид, как на рисунке 7, то среди образующих направлений только два взаимно перпендикулярны. Они-то и должны совпадать с направлениями сторон квадрата. В этом случае каждый из катетов треугольника разрезания должен целое число раз укладываться на стороне квадрата. Пусть сторона квадрата равна a, а катеты укладываются в ней соответственно n и m раз. Тогда площадь квадрата a^2, а площадь треугольника разбиения $\frac{a^2}{2mn}$.

Отсюда число треугольников разбиения равно $2mn$. Это, очевидно, четное число. Разбор паркета типа рис. 8 мы предоставляем читателю. (Не забудьте рассмотреть случай равнобедренного треугольника — ведь тогда имеются две пары взаимно перпендикулярных направляющих.)

Отметим, наконец, что паркет типа рис. 9 на квадрате реализовать нельзя. В этом можно убедиться следующим образом. Пусть длина гипотенузы треугольника разрезания равна a, тогда катеты соответственно равны $\frac{a}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Но если какой-нибудь прямоугольник выложен паркетом типа рис. 9, то (докажите!) одна из его сторон равна $k\frac{\sqrt{3}}{2}a$, а другая $n\frac{3}{2}a$, где n и k — целые числа. Но тогда

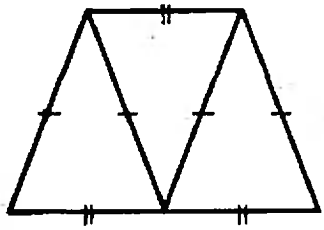


Рис. 11.

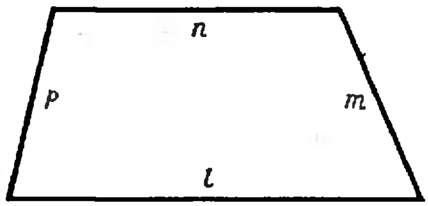


Рис. 12.

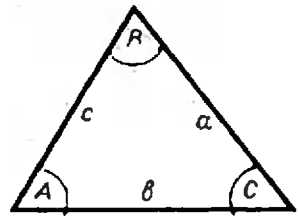


Рис. 13.

стороны прямоугольника оказываются несоизмеримыми, а поэтому квадрат получиться не может.

Теорема 2. *Если прямоугольник разрезан на равные треугольники, то все эти треугольники — прямоугольные и их четное число.*

Доказательство этой теоремы не отличается существенно от доказательства теоремы 1. Попробуйте доказать ее самостоятельно.

Убедившись, что паркеты для прямоугольника не столь уж разнообразны, естественно задать вопрос: а как обстоит дело с другими фигурами, например, с треугольником? Ясно, что равнобедренный треугольник можно разрезать на два равных треугольника. А другие?

Задача 4. *Докажите, что если треугольник разрезается на два равных треугольника, то он равнобедренный.*

Задача 5. *Дан произвольный треугольник; на сколько равных треугольников можно его разрезать?*

Все-таки и треугольник, как видно, можно разрезать. Можно подумать, что так обстоит дело для всех многоугольников.

Однако это не так. Простейшим примером неразрезаемой фугуры мы сейчас и займемся.

Рассмотрим вопрос о разрезании трапеций. На рисунке 11 приведен пример трапеции, которую можно разрезать на равные треугольники. Покажем, однако, что имеются трапеции, которые нельзя не только разрезать, но и разбить на равные треугольники. Существование таких трапеций основано на существовании несоизмеримых отрезков. Напомним, что отрезки a и b несоизмеримы, если отношение их длин — иррациональное число *). Назовем отрезки $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n$ *взаимно несоизмеримыми*, если никакой a_r не представим в виде $a_r = k_1a_1 + \ldots + k_na_n$, где $k_1, \ldots k_n$ — рациональные числа ($k_r = 0$).

Возьмем трапецию со сторонами l, m, n, p (рис. 12), где отрезки l, m, n, p взаимно несоизмеримы. Допустим, что ее можно разбить на равные треугольники. Рассмотрим сторону l. Наше разбиение разделит ее на части, каждая из которых — одна из сторон треугольника разбиения (рис. 13). Поэтому $l = k_1a + k_2b + k_3c$, где k_1, k_2, k_3 — целые неотрицательные числа. Аналогичные рассуждения для остальных сторон трапеции дают систему равенств

$$\left.\begin{aligned} l &= k_1a + k_2b + k_3c,\\ m &= k_4a + k_5b + k_6c,\\ n &= k_7a + k_8b + k_9c,\\ p &= k_{10}a + k_{11}b + k_{12}c \end{aligned}\right\},$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_{12}$ — целые неотрицательные числа. Мы допустили, что разбиение осуществимо. Значит, при данных $k_1, k_2, \ldots, k_{12}$ эти равенства можно рассматривать как систему уравнений относительно a, b и c.

Задача 6. *Покажите, что в общем случае из попарной несоизмеримости чисел $a_1, \ldots, a_n$ не следует их взаимная несоизмеримость.*

Задача 7. *Покажите, что совместное решение первых трех уравнений имеет вид*

$$\left.\begin{aligned} a &= r_1l + r_2m + r_3n,\\ b &= r_4l + r_5m + r_6n,\\ c &= r_7l + r_8m + r_9n \end{aligned}\right\}$$

где $r_1, \ldots, r_9$ — рациональные числа.

Подставив значения a, b и c в четвертое уравнение, получим $p =$

*) В дальнейшем отрезок и его длина обозначаются одинаково.

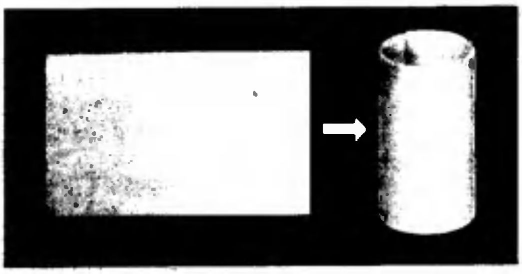


Рис. 14.

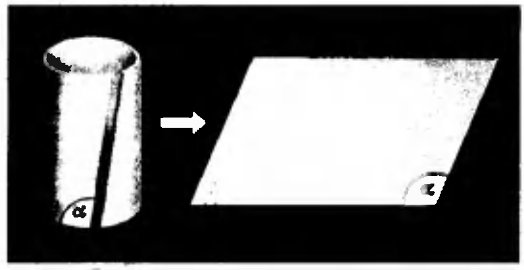


Рис. 15.

$= r_{10}l + r_{11}m + r_{12}n$, где r_{10}, r_{11}, r_{12} — рациональные числа. Но отрезки l, m, n взаимно несоизмеримы. Мы пришли к противоречию; следовательно, трапецию со взаимно несоизмеримыми сторонами разбить на равные треугольники невозможно.

Задача 8. *Покажите, что трапецию со сторонами* $n = \sqrt{2}$, $m = \sqrt{3}$, $l = \sqrt{7}$, $p = \sqrt{5}$ *нельзя разбить на равные треугольники.*

Возьмем теперь прямоугольник и склеим из него цилиндр (рис. 14). Если мы разрежем полученный цилиндр под каким-либо углом к основанию, то получим параллелограмм (рис. 15). Тем самым задача разрезания цилиндра прямыми эквивалентна разрезанию параллелограмма. Но тут ситуация во многом аналогична прямоугольнику: на четное число его разрезать легко, на нечетное число равных треугольников разрезать параллелограмм нельзя, а можно ли разбить его на нечетное число треугольников, неизвестно. Мы видели, что для трапеции возможность разбиения связана с разрешимостью определенной системы уравнений. Для параллелограмма мы имеем только три независимых уравнения, соответствующие трем величинам, определяющим параллелограмм, то есть двум сторонам и углу при основании. Поэтому задача усложняется. Важно отметить, что угол α при основании зависит целиком от нас, и мы можем выбирать его, как нам удобно.

Интересными свойствами по отношению к разрезаниям обладает другая фигура, которую можно склеить из прямоугольника — *лист Мёбиуса*. Лист Мёбиуса получается, если мы склеиваем прямоугольник $ABCD$ (рис. 16) следующим образом: приклеим AB к CD так, чтобы A склеилось с C, а B с D, то есть AB «переворачивается». Лист Мёбиуса обладает рядом замечательных свойств.

(См., например, «Энциклопедия элементарной математики», М., 1966, т. 5, стр. 500).

Если мы сделаем разрез под острым углом к краю поверхности, то получим равнобедренную трапецию (рис. 17). В ней угол α произволен и $a + b = AD + BC$. Нетрудно подобрать α так, чтобы $3b = 4a$, тогда, проведя шесть разрезов, мы получим 7 равных треугольников.

Задача 9. *Покажите, что лист Мёбиуса можно разрезать на любое число равных треугольников.*

Теперь, когда читатель ознакомился с некоторыми идеями и методами разрезания, мы предоставляем ему самостоятельно заняться теорией разрезаний и разбиений. Приведем ряд возможных задач из этой области.

Задача 10. *Докажите, что всякий прямоугольный треугольник разрезается на любое, начиная с двух, число треугольников, подобных первоначальному.*

Рис. 16.

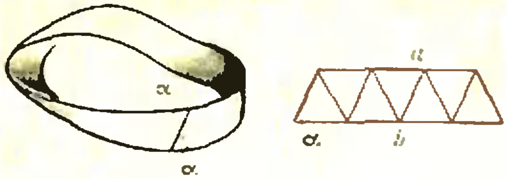


Рис. 17.

Задача 11. *Докажите, что всякий равнобедренный треугольник разрезается на любое, начиная с двух, число подобных треугольников.*

Задача 12. *Можно ли это утверждать для разрезания на треугольники, подобные первоначальному?*

Задача 13. *Покажите, что любой треугольник можно разрезать на четыре треугольника, подобных первоначальному.*

Задача 14. *Покажите, что любой треугольник разбивается на любое число треугольников, подобных первоначальному, начиная с шести.*

Задача 15. *Покажите, что если треугольник разбивается на три подобных треугольника, то это либо прямоугольный, либо равнобедренный треугольник.*

Задача 16. *Можно ли это утверждать для разрезания на пять подобных треугольников?*

Задача 17. *Докажите, что если какая-либо фигура разбивается на n подобных треугольников, то можно указать такое число m, что она будет разбиваться на любое число подобных треугольников, большее m.*

Задача 18. *Покажите, что существуют четырехугольники, которые не разбиваются на подобные треугольники.*

В заключение упомянем о некоторых нерешенных проблемах.

Проблема 1. *Можно ли разбить прямоугольник на нечетное число равных треугольников?*

Проблема 2. *Тот же вопрос для произвольного параллелограмма. (Мы предполагаем, что ответ на оба эти вопроса отрицателен.)*

Проблема 3. *Существует ли трапеция, которую нельзя разбить на подобные треугольники?*

(Интересно было бы получить какое-либо продвижение в решении этой проблемы путем улучшения метода, использованного нами для решения задачи о разрезании трапеции на равные треугольники)

Проблема 4. *Исследуйте разрезания других «многоугольных областей». Найдите необходимые и достаточные условия существования разрезания.*

Проблема 5. *Исследуйте разрезания многогранников на пирамиды.*

ЗАДАЧИ

1. Сумма первых n натуральных чисел равна трехзначному числу с равными цифрами. Найти n.

К. Тажиев

2. Дан треугольник ABC (см. рис. 1), $AB=BC$, $MNKL$ — квадрат. В каждую точку помещен вес: A — 1 кг, B — 1 кг, C — 1 кг, N — 2 кг, K — 2 кг, M — 1 кг, L — 1 кг.

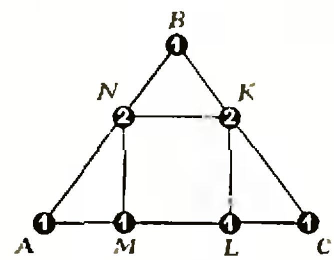


Рис. 1.

С помощью одной лишь линейки найти центр тяжести этой системы.

3. Дана окружность (см. рис. 2) и прямая l, пересекающая окружность в точках M и N; K — середина

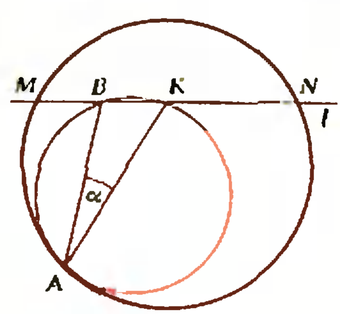


Рис. 2.

MN. Задан еще угол α. Построить окружность, касающуюся внутренним образом исходной окружности, проходящую через точку K, причем так, чтобы $\angle KAB = \alpha$.

БУМЕРАНГ

Ф. Гесс

По-видимому, трудно найти человека, которого не удивила бы траектория, описываемая бумерангом. И, конечно, многим очень хотелось бы сделать бумеранг и разобраться, почему же он возвращается. Но бумеранг не только игрушка. Тяжелый бумеранг довольно опасен. Поэтому мы предлагаем нашим читателям сделать бумеранг из легких материалов, например, из картона.

Ниже мы публикуем сокращенный вариант статьи, опубликованной в ноябрьском номере журнала «Scientific American» за 1968 г. Статья переведена и подготовлена к печати В. И. Бахминым.

Представьте себе, что брошенный вами кусок дерева летит по круговой траектории, потом возвращается и спокойно ложится у ваших ног. Абсурд! Однако именно так ведет себя бумеранг, конечно, если вы его правильно изготовите и бросите как надо.

Впервые бумеранг был сделан туземными жителями Австралии. Читатель, вероятно, немного разочаруется, узнав, что большинство австралийских бумерангов не возвращаются. Бумеранги можно грубо разделить на два типа: военные и возвращающиеся. Бумеранги первого типа используются как оружие, для войны или охоты. Хороший военный бумеранг летит очень далеко, но не возвращается. Возвращающиеся же бумеранги используются почти исключительно для игры.

На самом деле разобраться во всех существующих типах бумерангов не так просто, как может показаться. В Австралии существует множество видов туземного оружия. У разных племен форма бумеранга различна (рис. 1).

По внешнему виду нелегко заключить, возвращается ли данный бумеранг. Как правило, возвращающийся бумеранг менее массивен, и угол между его плечами более острый. Обычно он бывает длиной от 25 до 75 сантиметров, шириной от трех до пяти сантиметров и толщиной от половины до полутора сантиметров. Угол между плечами бумеранга может меняться от 80 до 140 градусов. Вес достигает 300 граммов.

Характерная банановидная форма большинства бумерангов едва ли влияет на его способность возвращаться. Бумеранги в форме букв *X*, *V*, *S*, *T*, *H*, *Y* (видимо, возможны и другие формы) можно сделать так, что они будут возвращаться. Важно,

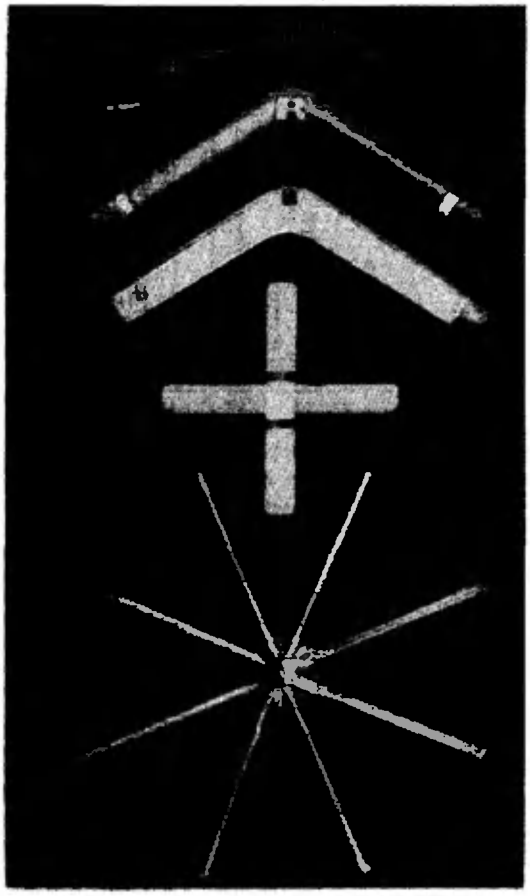


Рис. 1.

чтобы плечи бумеранга были с одной стороны более выпуклыми, чем с другой (рис. 2). Оба плеча бумеранга должны лежать более или менее в одной плоскости. Лучше всего сделать бумеранг из куска дерева скругленной формы, следуя структуре его волокон.

Рис. 2.

Но можно использовать и другой материал, например, фанеру, пластмассу или картон.

Как бросать возвращающийся бумеранг? Обычно его берут правой рукой за один из концов и держат вертикально, чуть повернув влево выпуклую сторону. При этом оба конца бумеранга направлены либо вперед (так бросают австралийцы), либо назад. Вы можете выбрать любой способ. Затем, размахнувшись правой рукой, бросают бумеранг вперед в горизонтальном направлении или чуть вверх. Для успеха необходимо, во-первых, чтобы плоскость бумеранга при броске была почти вертикальной или немного наклонена вправо, но только не горизонтальна. Во-вторых, бумеранг нужно заставить быстро вращаться. Этого можно добиться, если в момент броска резко задержать движение правой руки вперед. По инерции бумеранг сразу же начнет вращаться вокруг точки, за которую его держал метатель, и, следовательно, приобретет одновременно поступательную и вращательную скорости.

Сначала кажется, что бумеранг улетает, но вскоре его траектория отклоняется влево, а часто и вверх. Затем он делает широкую, более или менее округлую петлю и падает где-то у ног бросавшего, иногда, впрочем, описывая перед этим еще одну небольшую петлю. Вторая петля бывает искривлена в другую сторону, так что вся траектория в этом случае имеет форму восьмерки (рис. 3). Великолепное зрелище, когда бумеранг, описав петлю и теряя скорость, парит некоторое время над вашей головой и потом медленно спускается.

Каждый бумеранг характеризуется легкостью метания, видом траектории и способностью к парению. Кроме того, любой бумеранг может описывать разные орбиты в зависимости от способа бросания. Точность возвращения во многом зависит от мастерства метателя. Дальность полета может быть 40 метров, а может быть и вдвое меньше, высота полета — около 15 метров, хотя может быть и

Рис. 3.

1,5 метра. Современные австралийские бумеранги пролетают расстояние более 100 метров, при этом они неплохо возвращаются. К сожалению, сам я не смог сделать бумеранг, летающий далее, чем на 50 метров.

До сих пор мы молчаливо предполагали, что метатель не левша и бумеранг у него тоже «правый». Если смотреть на обычный «правый» бумеранг во время полета с выпуклой стороны, он будет вращаться против часовой стрелки. Поэтому можно говорить о ведущем и ведомом краях каждого плеча бумеранга. У бумеранга туземцев оба края каждого из плеч более или менее острые. Но у современного бумеранга ведущий край плеча тупой, как ведущий край крыла самолета. Иногда плечи бумеранга немного изгибают, так что концы его ведущих краев слегка приподнимаются.

Объяснить явления, происходящие с бумерангом, можно только рассматривая его взаимодействие с воздухом. Ведь в вакууме он не может описать ничего, кроме параболы. Однако эта задача очень сложна, поэтому попробуем взглянуть на проблему проще.

Если бросить бумеранг горизонтально, заставив вращаться в вертикальной плоскости, то каждое его плечо будет рассекать воздух. Из-за необычного профиля плеч возникает сила **F**, с которой воздух давит на плечи бумеранга в направлении от более плоской к более выпуклой части (рис. 4). Эта сила подобна подъемной силе, действующей на крыло самолета. Кроме того, со стороны воздуха на плечо бумеранга действует сила сопротивления **Q**. При броске правой рукой сила **Q** будет направлена справа налево. Но одной этой силы недостаточно для того, чтобы заставить бумеранг повернуть влево.

Скорость плеча бумеранга относительно воздуха не постоянна.

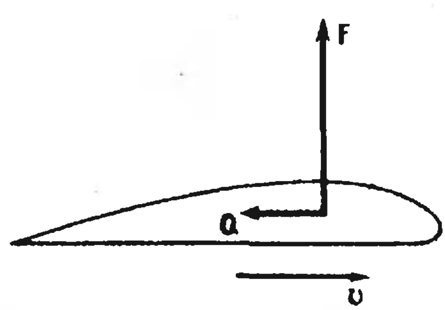


Рис. 4.

Когда плечо находится в верхней половине описываемой окружности, поступательная скорость бумеранга **v** складывается со скоростью вращения **u**, а когда в нижней, то скорости направлены противоположно, так что результирующая скорость уменьшается или даже совсем исчезает в некоторой точке (рис. 5). Таким образом, бумеранг испытывает действие не только силы, направленной справа налево, но и момента сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, поворачивающего его вокруг горизонтальной оси и стремящегося переместить верхнюю часть бумеранга

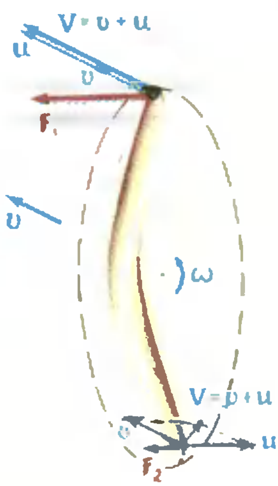


Рис. 5.

влево. Но этого перемещения в действительности почти не происходит, так как бумеранг вращается настолько быстро, что ведет себя как гироскоп *).

Но гироскоп (который представляет собой быстро вращающийся маховик) обладает следующим свойством: под действием силы, пытающейся его повернуть, гироскоп поворачивается не в направлении действия этой силы, а вокруг оси, перпендикулярной как оси вращения, так и оси, вдоль которой направлен поворачивающий его момент. В нашем случае бумеранг начнет поворачиваться влево. Это движение называется прецессией.

Итак, бумеранг поворачивается влево, так что плоскость его постепенно составляла бы все больший угол с направлением движения, если бы не быстро увеличивающиеся гироскопические силы, которые вновь направляют полет параллельно плоскости бумеранга. В результате траектория искривляется влево, и угол между плоскостью бумеранга и направлением его движения поддерживается очень небольшим.

Часто плоскость бумеранга, почти вертикальная в начале полета, в конце концов становится почти горизонтальной, бумеранг как бы «ложится». Давайте разберем этот вопрос подробнее.

Каждое плечо бумеранга будем рассматривать как крыло самолета. Такое крыло движется вперед и в то же время вращается вокруг центра тяжести бумеранга. Будем считать, что движение, перпендикулярное плоскости бумеранга, отсутствует. У крестообразного бумеранга центр тяжести лежит на пересечении лопастей, но у обычного бумеранга это не так. Там одно плечо находится перед центром масс, а другое — позади. Мы назовем эксцентриситетом плеча расстояние от него до центра масс. Каждую точку крыла омывает воздушный поток, меняющийся непрерывно по величине и направлению относительно этой части крыла. Бывает так, что воздушный поток направлен навстречу несущему краю крыла. Это легко понять, если представить медленно вращающийся бумеранг, несущийся с большой поступательной скоростью, и взглянуть на его плечо, направленное вниз. Что же за силы действуют в этом случае на лопасть бумеранга?

Давайте сначала рассмотрим случай попроще: лопасть движется по прямой с постоянной скоростью **V** относительно воздуха (рис. 6). Разложим аэродинамическую силу на две составляющие — подъемную силу **F**

*) См. «Квант» № 12, 1970, «Почему устойчив велосипед» и «Квант» № 10, 1971, «Механика вращающегося волчка».

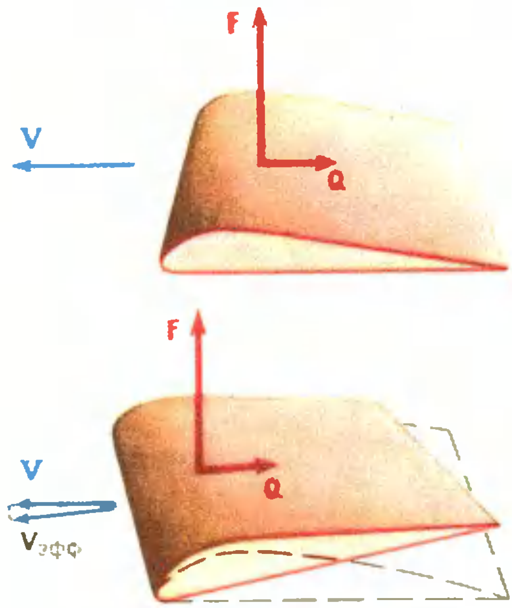


Рис. 6.

(перпендикулярную **V**) и силу сопротивления **Q** (направленную против **V**). Обе они, как оказывается, пропорциональны V^2. Если крыло не перпендикулярно направлению скорости, то у **V** появляется составляющая, параллельная крылу, которая никак не влияет на движение. Поэтому можно заменить скорость **V** ее составляющей, перпендикулярной крылу, или эффективной скоростью $\mathbf{V}_{эфф}$. В этом случае силы пропорциональны $(V_{эфф})^2$.

Каждая точка плеча бумеранга принимает участие в поступательном движении. Скорость же относительно воздуха меняется от точки к точке,

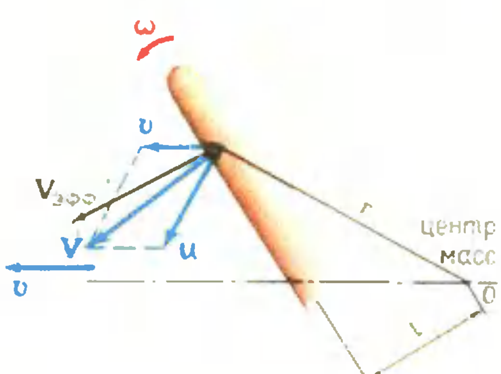


Рис. 7.

так как бумеранг вращается. При скорости вращения ω и расстоянии от оси вращения r (ось проходит через центр масс бумеранга) скорость точки $u=\omega r$. Для каждой точки плеча можно, сложив **v** и **u**, найти результирующую скорость **V**. Ее составляющая, перпендикулярная плечу бумеранга, есть $\mathbf{V}_{эфф}$ (рис. 7). Конечно, величина $\mathbf{V}_{эфф}$ для каждой точки плеча будет непрерывно меняться во время вращения. Очевидно, что вклад каждой точки плеча бумеранга в подъемную силу и силу сопротивления в каждый момент вращения пропорционален $(V_{эфф})^2$.

Итак, на каждое из плеч бумеранга действует средняя подъемная сила **F** (силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ на каждое плечо соответственно), средний момент

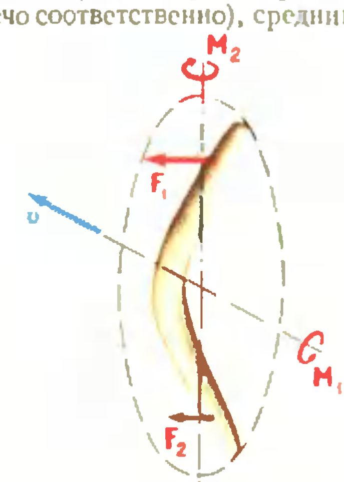


Рис. 8.

этой силы $\mathbf{M}_1$ относительно горизонтальной оси, параллельной скорости бумеранга, который заставляет бумеранг отклоняться влево, и момент $\mathbf{M}_2$ — относительно оси, перпендикулярной скорости **V**, который заставляет бумеранг «ложиться» (рис. 8). Кроме этого, на бумеранг действует средняя сила сопротивления **Q**, которая уменьшает поступательную скорость бумеранга, и средний момент этой силы $\mathbf{M}_Q$, замедляющий скорость вращения ω. Оказывается, ни одна из этих величин, кроме $\mathbf{M}_2$, не зависит от эксцентриситета, а $\mathbf{M}_2$

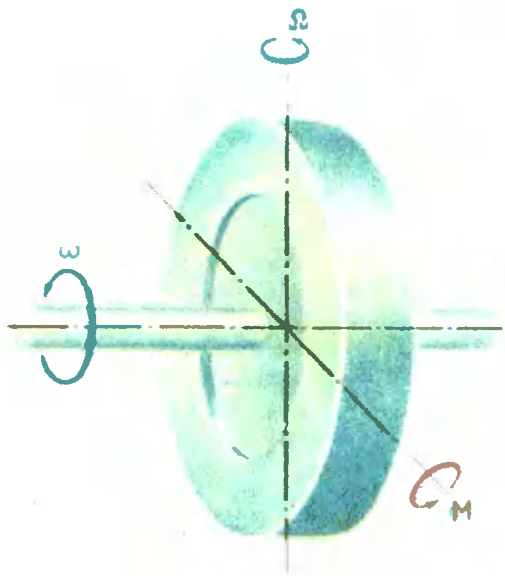


Рис. 9.

строго пропорциональна величине эксцентриситета.

Силы и моменты, действующие на бумеранг в целом, получаются сложением величин для каждого плеча. Вклады в $\mathbf{M}_2$ от разных плеч бумеранга могут частично или полностью уничтожить друг друга.

Теперь мы переходим к важному вопросу: как будет двигаться бумеранг под влиянием всех этих сил и моментов (и силы тяжести, конечно)?

Как уже упоминалось раньше, средний момент $\mathbf{M}_1$ вызывает гироскопическую прецессию бумеранга. Давайте посмотрим на гироскоп повнимательнее. Если гироскоп вращается вокруг своей оси со скоростью ω и на него действует момент $\mathbf{M}$, направленный вдоль оси, перпендикулярной оси вращения, то гироскоп начинает прецессировать, причем ось прецессии перпендикулярна как оси вращения, так и оси момента $\mathbf{M}$ (рис. 9). Угловая скорость прецессии обозначается Ω. Между ω, Ω, $\mathbf{M}$ и моментом инерции гироскопа I *) существует очень простая связь, а именно:

$$\Omega = \mathbf{M}/I\omega.$$

Для бумеранга момент M пропорционален ωV, так что скорость прецессии Ω должна быть пропорциональна

$$\frac{\omega V}{I\omega} = \frac{V}{I}.$$

Следовательно, скорость прецессии не зависит от скорости вращения бумеранга ω.

Можно вывести еще более странное заключение. Скорость прецессии пропорциональна V/I; коэффициент пропорциональности зависит от формы бумеранга. Следовательно, можно написать

$$\Omega = CV,$$

где C — характерный параметр бумеранга. Теперь пусть скорость бумеранга вдвое больше.

Следовательно, положение его плоскости будет тоже изменяться в два раза быстрее. Это показывает, кроме всего прочего, что бумеранг полетит по той же кривой.

Таким образом, диаметр орбиты бумеранга, грубо говоря, не зависит ни от скорости вращения бумеранга, ни от его поступательной скорости. Это означает, что длина пути бумеранга — величина более или менее постоянная. Параметры орбиты бумеранга пропорциональны его моменту инерции; они становятся меньше, если профиль плеча бумеранга вызывает большую подъемную силу. Поэтому, если вы хотите, чтобы буме-

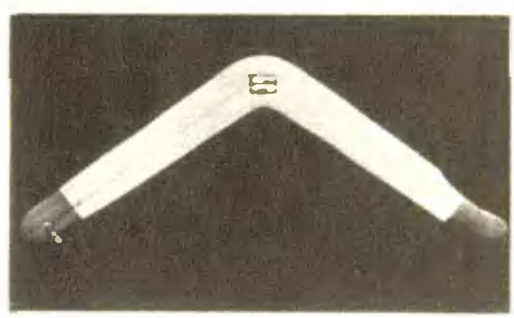


Рис. 10.

*) См. «Квант» № 1, 1971, «Вращательное движение тел».

Рис. 11.

Рис. 12.

ранг описал малую орбиту (например, в комнате), он должен быть сделан из легкого материала. Для очень больших орбит нужен тяжелый бумеранг с профилем, дающим малую подъемную силу (и, конечно, с наименьшим возможным сопротивлением).

В принципе у нас есть все необходимое, чтобы составить уравнение движения идеального бумеранга. Эти уравнения могут быть решены численно на вычислительной машине, и мы получим координаты, скорость и ориентацию бумеранга в каждый момент.

Как теперь сравнить вычисленные пути с действительной траекторией бумеранга? Для объективности необходимо в течение всего полета регистрировать местоположение бумеранга. Это можно сделать при помощи двух фотоаппаратов. Для фиксирования начальных данных необходима специальная метательная машина. Понятно, что у меня не было возможности делать такие эксперименты, но я ухитрился зафиксировать фотоаппаратом одну проекцию траектории полета бумеранга. На конце плеча моего экспериментального бумеранга была прикреплена крошечная электрическая лампочка, питающаяся от двух маленьких полуторавольтовых батареек, помещенных в отверстие, сделанное в центральной части бумеранга (см. снимок на рисунке 10). Таким образом, бумеранг в течение полета нес с собой источник света, достаточно сильный, чтобы его можно было ночью сфотографировать. Одна из полученных таким образом траекторий показана на рисунке 11. Для сравнения на рисунке 12 приведена теоретически вычисленная орбита.

Так как фотоаппарат был расположен недалеко, та часть траектории, где бумеранг пролетал совсем близко от объектива, кажется на фотографии увеличенной. При расчете соответствующей теоретической орбиты был принят во внимание эффект перспективы. Читатель может для себя решить, находит ли он удовлетворительным соответствие между теорией и экспериментом. Во всяком случае, основной внешний вид и особенности траектории бумеранга воспроизводятся этой теорией достаточно хорошо.

В «Кванте» № 6 следующие опечатки:

стр.			напечатано	должно быть
51	левая колонка	5 строка снизу	100 $м^3$	1000 $м^3$
53	правая колонка	10 строка снизу	$\frac{4\sqrt[4]{x}+x\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{x}+\sqrt{2x}}-\sqrt{4+x-\sqrt{x}}$	$\frac{4\sqrt[4]{x}+x\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{x}+\sqrt{2x}}+\sqrt{4+x-4\sqrt{x}}$
74	левая колонка	3 строка снизу	$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2}{2}$
74	правая колонка	15 строка снизу	$0<a<68$	$0<a<148$

(Окончание см. стр. 74)

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 декабря по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач Вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М182, М186» или «... Ф198».

Решения задач по каждому из предметов — математике и физике, а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах.

Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с Вашими решениями этих задач (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

ЗАДАЧИ

М166. а) Школьники одного класса в сентябре ходили в два туристских похода. В первом походе мальчиков было меньше $^2/_5$ общего числа участников этого похода и во втором — тоже меньше $2/5$. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше $4/7$ общего числа учеников, если известно, что каждый из учеников был по крайней мере в одном походе.

б) Пусть в i-м походе ($i=1,2,\ldots,n$) мальчики составляли α_i часть общего количества участников этого похода. Какую наибольшую долю могут составлять мальчики на общей встрече всех туристов (всех, кто был хотя бы в одном из n походов)?

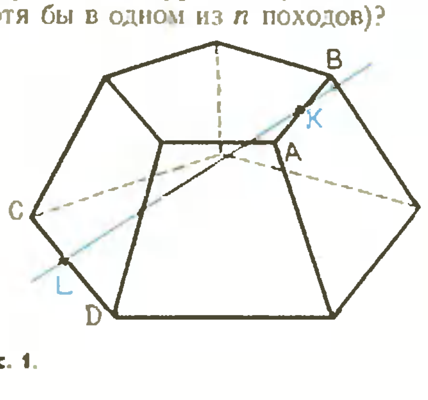


Рис. 1.

М167. Докажите, что в любой арифметической прогрессии

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+nd,\ \ldots,$$

составленной из натуральных чисел, найдется бесконечно много членов, в разложение которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.

Дж. Пойа

М168. В правильной усеченной пирамиде (рис. 1) точка K — середина некоторой стороны AB верхнего основания, L — середина некоторой стороны CD нижнего основания.

Докажите, что проекции отрезков AB и CD на прямую KL равны по длине.

Г. Нотен

М169. Пусть $k<n$ — натуральные числа. Расставьте числа $1, 2, 3, \ldots, n^2$ в таблицу $n\times n$ так, чтобы в каждой строке числа шли в порядке возрастания и при этом сумма чисел в k-м столбце была а) наименьшей; б) наибольшей.

Н. Б. Васильев

М170. а) Пусть M и N — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со сторонами AB и AC, P — точка пересечения прямой MN с биссектрисой угла B. Докажите, что угол BPC — прямой.

б) Докажите более общий факт: если точка O, расположенная внутри треугольника ABC, такова, что $\measuredangle BOC - \measuredangle BAO = 90°$, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны AB и AC, P — точка пересечения прямых BO и MN, то $\measuredangle BPC = 90°$ (рис. 2).

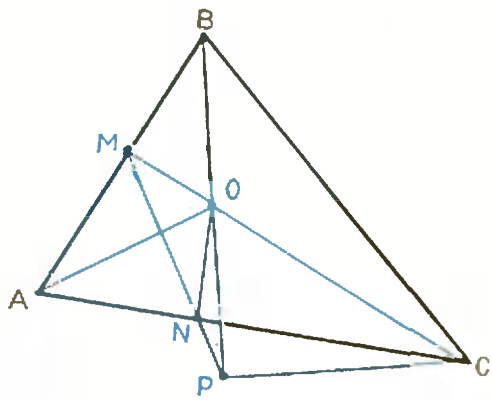


Рис. 2.

Ф180. В закрытом кубическом сосуде с ребром 1 *см* имеется n молекул газа. Стенки кубика таковы, что молекула газа, попав на стенку, остается на ней 10^{-2} *с*. Оценить, сколько молекул газа находится на стенках. Сосуд находится при комнатной температуре.

А. А. Боровой

Ф181. Подводная лодка, погружаясь вертикально, излучает короткие звуковые импульсы сигнала гидролокатора длительностью τ_0 в направлении дна. Длительность отраженных сигналов, измеряемых гидроакустиком на лодке, равна τ. Какова скорость погружения лодки?

Скорость звука в воде V. Дно горизонтально.

Ф182. В однородное электрическое поле, напряженность которого равна E, внесли металлический шар. Известно, что плотность поверхностных зарядов на «полюсе» шара в точке A (рис. 3) равна σ_0. Определить плотность поверхностных зарядов в точке B, направление на которую из центра

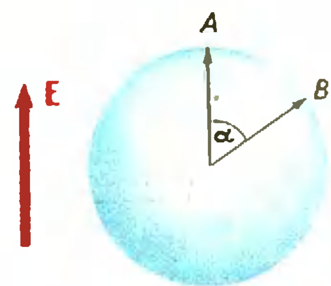


Рис. 3.

шара составляет угол α с направлением внешнего электрического поля.

Ю. А. Дрейзин

Ф183. Спутник движется вокруг Земли по почти круговой орбите со скоростью v. Изменение его орбиты связано с тем, что на спутник действует со стороны микрочастиц сила трения $F = A \cdot v^{\alpha}$, где A и α — константы. Найти α, если известно, что радиус орбиты спутника меняется очень медленно.

Ф184. Оцените, на какую высоту вы смогли бы подпрыгнуть на Луне.

И. Ш. Слободецкий

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М126—М128

М126

Многоугольник, описанный вокруг окружности радиуса r, каким-то образом разрезан на треугольники. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников больше r.

Пусть S — площадь данного многоугольника, p — половина его периметра; S_i, p_i, r_i — соответственно площади, полупериметры и радиусы вписанных окружностей треугольников, на которые он разрезан ($i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда $S = pr$, $S_i = p_i r_i$ и $p > p_i$ для всех i (нетрудно доказать, что периметр многоугольника больше периметра любого выпуклого многоугольника, в нем содержащегося). Поэтому

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = \frac{S_1}{p_1} + \frac{S_2}{p_2} + \cdots + \frac{S_n}{p_n} > \frac{S_1}{p} + \frac{S_2}{p} + \cdots + \frac{S_n}{p} = \frac{S}{p} = r.$$

Последнее равенство иллюстрируется рисунком 1.

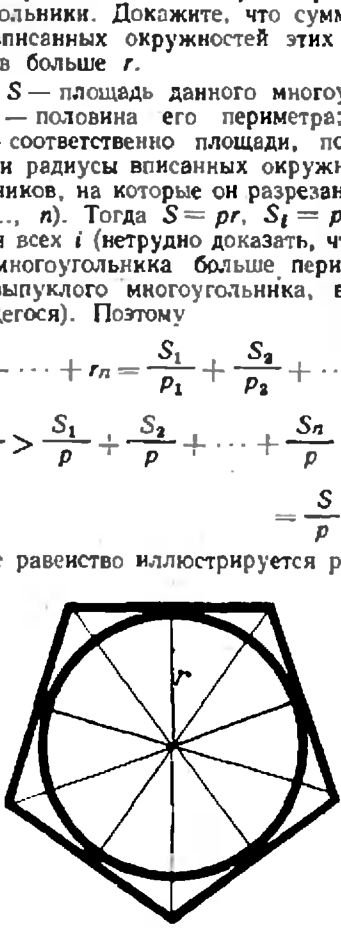


Рис. 1.

М127

Для каждого натурального числа n обозначим через $s(n)$ сумму его цифр (в десятичной записи). Назовем натуральное число m особым, если его нельзя представить в виде $m = n + s(n)$, где n — какое-то натуральное число. (Например, число 117 не особое, поскольку $117 = 108 + s(108) = 108 + 9$, а число 121, как нетрудно убедиться, — особое.) Верно ли, что особых чисел существует лишь конечное число?

Ответ: это утверждение неверно; особых чисел бесконечно много.

Идея наиболее естественного решения состоит в следующем. Рассмотрим все числа n от 1 до какого-то N. Среди них найдется некоторое количество R_N таких n, для которых $n + s(n) > N$. Поэтому среди чисел от 1 до N заведомо не больше $N - R_N$ чисел, представимых в виде $n + s(n)$, то есть по крайней мере R_N чисел — особые (мы здесь даже не учитываем то, что некоторые числа представимы в виде $n + s(n)$ более, чем одним способом). Остается убедиться в том, что, выбирая соответствующим образом N, можно получить сколь угодно большое R_N.

Такая идея встречается в решениях *Б. Бикташева* и *А. Вайнтроба* из Москвы, *А. Григоряна* из Баку, *И. Маджулиса* из Риги и некоторых других читателей. Чтобы довести ее до полного решения, докажем, что среди чисел n от 1 до $N = 10^{10^k+k}$ существует более 10^k таких, для которых $n + s(n) > N$. Действительно, если $n < N$ и $n \geq N_1 = (10^{10^k} - 1)\,10^k = 9\ldots90\ldots0$ (10^k девяток и k нулей), то

$$n + s(n) \geq (10^{10^k+k} - 10^k) + 9\cdot 10^k > N,$$

а количество чисел n таких, что $N_1 \leq n \leq N$, равно $N - N_1 + 1 = 10^k + 1$.

Другое решение (наиболее аккуратно оно проведено в работах *А. Печковского* из Москвы и *Л. Пугача* из Днепропетровска) — указание способа, позволяющего построить конкретную последовательность особых чисел. Вот одна такая последовательность:

$$m_1 = 9+11 = 20,$$
$$m_2 = 20+101 = 121,$$
$$m_3 = 121+1001 = 1122,$$

где $m_k = m_{k-1}+10^k+1$.

Докажем по индукции, что все эти числа — особые. Предположим, для m_{k-1} это верно ($k\geq3$), а для m_k — нет: $m_k = n+s(n)$.

Прежде чем пользоваться этим предположением, докажем, что десятичное разложение числа m_k выглядит так:

$$m_k = 10^k+a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_0,$$

где цифра $a_{k-1}\neq0$, то есть что $11\cdot10^{k-1}<m_k<2\cdot10^k$. Левое неравенство очевидно, а правое проверяется по индукции: $m_k = m_{k-1} + 10^k + 1<2\cdot10^{k-1} + 10^k + 1 = 12\cdot10^{k-1}+1<2\cdot10^k$.

Теперь можно доказать, что десятичная запись числа n тоже начинается с единицы: $n = 10^k+b_{k-1}\cdot10^{k-1}+ \ldots + b_1\cdot10+b_0$, то есть что $10^k<n<2\cdot10^k$. Здесь правое неравенство очевидно, а левое доказывается от противного если $n<10^k$, то $s(n)<9k$ и $n+s(n)<10^k+9k<10^k+10^{k-1}=11\cdot10^{k-1}<m_k$ ($9k<10^{k-1}$ при $k\geq3$).

Обозначим число $n-10^k$ (число n с отброшенной первой цифрой, равной единице) через n^*. Тогда, очевидно, $s(n^*) = s(n)-1$ и поэтому

$$n^*+s(n^*) = n-10^k+s(n)-1 = m_k-10^k-1=m_{k-1}.$$

Таким образом, получается, что число m_{k-1} — не особое Противоречие с предположением доказывает справедливость индукционного перехода от $k-1$ к k. То, что числа m_1 и m_2 — особые, установить нетрудно.

М128

Найдите отношение сторон треугольника, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части

Пусть BK — медиана треугольника ABC — делится вписанной окружностью на равные отрезки $BM = MN = NK = x$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и T — точка касания вписанной окружности со стороной BC (рис. 2)

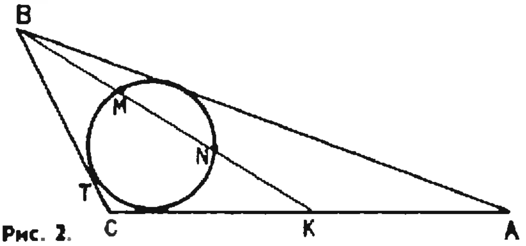


Рис. 2.

Нам понадобятся следующие два соотношения, справедливые для любого треугольника ABC.

$$a+c-b = 2BT,$$
$$2a^2+2c^2-b^2 = 4BK^2$$

(первое выводится из равенств $BT+CT=a$, $BT - CT = c - b$; второе легко доказать, достроив треугольник до параллелограмма $ABCD$). Из второго равенства находим

$$2a^2+2c^2 - b^2 = 36x^2. \qquad (1)$$

Поскольку $BT^2 = BM\cdot BN$, то

$$(a+c-b)^2 = 8x^2. \qquad (2)$$

Наконец, поскольку точки B и K, очевидно, одинаково удалены от центра вписанной окружности, то $BC = KC$, откуда

$$b = 2a. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и (2), находим

$$c^2 - a^2 = 18x^2, \ (c-a)^2 = 8x^2.$$

Из этих равенств получим (ясно, что $c-a\neq0$, $x\neq0$).

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{9}{4}, \text{ откуда } \frac{c}{a} = \frac{13}{5}.$$

Ответ: $a:b:c = 5:10:13$.

Нетрудно проверить, что в треугольнике с таким отношением сторон медиана стороны b действительно разделится вписанной окружностью на три равные части (при проверке удобно пользоваться теми же формулами, которые применялись выше).

Правильные решения некоторых из задач **М121 — М128** прислали: *Б. Ашавский* (Москва) **М126**; *В. Астапкович* (Борисов БССР) **М124**; *В. Береза* (Горький) **М122 — М123**; *А. Блохин* (Киселевск Кемеровской обл.) **М123**; *А. Бикташев* (Москва) **М126 — М128**; *А Богданов* (Глазов Удмуртской АССР) **М128**; *А. Бочаров* (Николаев) **М126 — М128**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **М126**; *А. Бруттер* (Кишинев) **М128**; *О. Бурлаков* (Ташкент) **М128**; *А. Вайнтроб* (Москва) **М126 — М128**; *Т. Галкина* (Куйбышев) **М126**; *Л. Генринович* (Ташкент) **М126, М128**; *А. Гордиенко* (с. Полтавченское Краснодарского края) **М122, М126**; *А. Григорян* (Баку) **М126**; *В. Гринман* (Москва) **М124**; *А. Демидов* (Москва) **М124**; *В. Дробитько* (Херсон) **М126**; *В. Евдокимов* (Ярославль) **М123**; *А. Едренкин* (Москва) **М126**; *М. Жуков* (Баку) **М128**; *А. Жумадильдаев* (Алма-Ата) **М122 — М124**; *В. Зарубин* (п. Летний отдых Московской обл.) **М126**; *В. Заблоцкий* (Донецк) **М128**; *Э. Зейман* (Оргеев Молдавской ССР) **М126**; *Т. Златкус* (Советск Калининградской обл.), **М128**; *И. Игнатьев* (с. Сарманово Татарской АССР) **М128**; *М. Илларионов* (Воронеж) **М121 — М124, М126, М128**; *С. Иоанниди* (Тбилиси) **М128**; *М. Кауль* (Фрунзе) **М121, М122, М124**; *А. Квасов* (Москва) **М122 — М124, М126**; *А. Кисилев* (Москва) **М122**; *Ю. Кисин* (Старая Русса) **М123, М124, М126**; *В. Клейменов* (Улан-Уде) **М126**; *В. Колосов* (Киев)

М122 — М124, М126; *О. Комаев* (Москва) **М126, М128;** *В. Кореняко* (Воронеж) **М121 — М125;** *А. Костянский* (Орджоникидзе) **М122;** *Ю. Котлерис* (Рига) **М126;** *С. Котко* (Воронеж) **М123, М126, М128;** *Г. Левин* (Куйбышев) **М126;** *Г. Ли* (с. Йнк Верхнечирчикского р-на Ташкентской обл.) **М126;** *С. Лягушин* (Днепропетровск) **М126, М128;** *И. Маджулис* (Рига) **М126, М128;** *А. Макаричев* (Львов) **М121, М126, М128;** *С. Малков* (Иваново) **М126, М128;** *Г. Матвеев* (Ленинград) **М126, М128;** *В. Меерсон* (Николаев) **М128;** *И. Меджибовский* (Москва) **М122, М126, М128;** *Л. Миллер* (Уфа) **М126;** *А. Мосолов* (Москва) **М123;** *С. Муровенко* (Москва) **М121, М122, М124;** *Р. Нарсия* (Тбилиси) **М128;** *С. Овчинников* (Ленинград) **М126; М128;** *Г. Оганнисян* (Ереван) **М123, М126;** *Е. Онегин* (Скопин Рязанской обл.) **М126;** *В. Орлов* (Астрахань) **М128;** *И. Печковский* (Москва) **М126 — М128;** *В. Папава* (Тбилиси) **М122;** *Б. Папшиник* (Баку) **М126, М128;** *М. Прегер* (Томск) **М121 — М123;** *Л. Пугач* (Днепропетровск) **М126 — М128;** *А. Райнин* (Ленинград) **М123;** *Ю. Рацин* (Рига) **М121, М123, М126, М127;** *А. Ребурак* (Ангарск) **М128;** *В. Сандригайло* (д. Турейск Могилевской обл.) **М126;** *А. Сеин* (Тюмень) **М126;** *А. Семенов* (Долгопрудный Московской обл.) **М124, М128;** *В. Сервах* (Фрунзе) **М126;** *А. Слинкин* (Москва) **М122, М126;** *Б. Слепченко* (Челябинск) **М122 — М124, М126, М128;** *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) **М122, М124, М126;** *А. Смирнов* (Горький) **М126, М128;** *В. Соболев* (Ленинград) **М123, М124;** *А. Соколовский* (Кривой Рог) **М126, М128;** *М. Сокольчик* (Минск) **М121 — М124, М126 — М128;** *Т. Сулейманов* (п. Ильич Пахтааральского р-на Ташкентской обл.) **М126, М128;** *П. Сургучев* (Рига) **М126, М128;** *С. Табачников* (Москва) **М126;** *А. Тагиев* (Баку) **М126, М128;** *Я. Телер* (Ташкент) **М128;** *О. Трунов* (Джелал-Абад) **М126;** Э. Туркевич (Черновцы) **М121 — М124, М126, М128;** *Б. Фришлинг* (Тбилиси) **М121 — М123, М124, М126;** *Ю. Хачатурян* (Баку) **М126, М128;** *В. Хлебопрос* (Киев) **М126, М127;** *М. Хорошин* (Чернигов) **М128;** *С. Цанава* (Тбилиси) **М126, М128;** *С. Цецохо* (Новосибирск) **М122 — М124; М126, М128;** *А. Цицуашвили* (Тбилиси) **М121, М123;** *С. Черемшанцев* (Ленинград) **М126;** *А. Черняк* (Минск) **М122 — М126, М128;** *А. Чигогидзе* (Тбилиси) **М123, М124, М126;** *В. Шелюбский* (Минск) **М123;** *А. Шерстюк* (Николаев) **М121, М123, М124, М126;** *А. Ширяев* (Минск) **М126;** *Ф. Шмидель* (Москва) **М121 — М124;** *А. Шпарлинский* (Москва) **М126, М128;** *Н. Якубов* (Фрунзе) **М128;** *Т. Ярославцева* (Брянск) **М128.**

Н. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф142—Ф147

Ф142

Стальной шарик, подвешенный на нитке длины l, отклонили так, что нить приняла горизонтальное положение, и отпустили. В тот момент, когда нить составляла угол $\alpha = 30°$ с вертикалью, шарик ударился о неподвижную стальную плиту (рис. 3). На какую высоту поднимется шарик после удара о плиту, если удар можно считать абсолютно упругим?

Пусть скорость шарика в момент его удара о плиту равна v. Эта скорость направлена перпендикулярно нити. Так как удар шарика — абсолютно упругий и, следовательно, мгновенный, то при ударе шарик ведет себя как свободный, не связанный с нитью. Поэтому скорость шарика при ударе меняется только по направлению, так что угол отражения шарика от плиты равен углу падения. Это означает, что после удара о плиту скорость шарика равна v и направлена под углом α к перпендикуляру к плите.

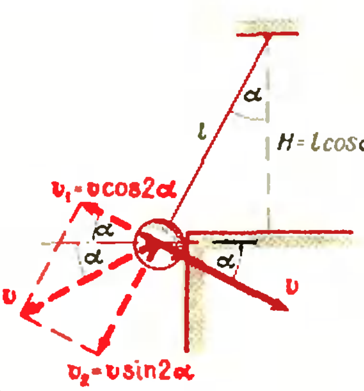


Рис. 3.

Разложим скорость шарика на две составляющие — вдоль нити и перпендикулярно ей. Первая из составляющих вызывает деформацию нити и не влияет на высоту подъема шарика. Поэтому для вычисления высоты подъема шарика можно считать, что после удара о плиту он движется со скоростью $v_1 = v\cos 2\alpha$, перпендикулярной нити. Энергия шарика сразу после удара равна $\frac{mv_1^2}{2}$, при подъеме шарика на высоту h она становится равной mgh. (Часть полной кинетической энергии шарика $W = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$ после удара перейдет в энергию колебаний шарика вдоль нити или, в конечном счете, в тепло. Величина этой потери равна $\frac{mv_2^2}{2}$.)

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgh \quad \text{или} \quad \frac{v^2\cos^2 2\alpha}{2} = gh.$$

Найдем теперь скорость v шарика в момент его столкновения с плитой. Вначале шарик находился на высоте $H = l\cos\alpha$ над плитой. Изменение потенциальной энергии шарика при движении из первоначального положения до столкновения с плитой равно кинетической энергии, приобретенной шариком:

$$\frac{mv^2}{2} = mgl\cos\alpha.$$

Отсюда

$$v^2 = 2gl\cos\alpha.$$

Следовательно,

$$h = \frac{v^2\cos^2 2\alpha}{2g} = l\cos\alpha\cos^2 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{8}\,l.$$

Ф143

Самолет садится на палубу авианосца, имея скорость 100 *км/ч*. Зацепившись за канат торможения, самолет пробегает до полной остановки 50 *м*. Определить перегрузки, если коэффициент упругости каната не меняется по мере его растяжения.

При торможении самолета на него со стороны каната действует сила $F = kx$, где x — удлинение каната, k — коэффициент его упругости. Эта сила увеличивается по мере растяжения каната. Увеличивается и ускорение

$$a = \frac{F}{M} = \frac{k}{M}x,$$

сообщаемое силой F самолету (M — масса самолета).

Но с ускорением a движется не только самолет, но и летчик, удерживаемый ремнями на сидении. Это ускорение сообщает летчику сила T, действующая на него со стороны ремней. Если масса летчика равна m, то

$$T = ma = \frac{mk}{M}x.$$

Эта сила максимальна при $x = L = 50$ *м*,

$$T_{max} = \frac{mkL}{M}. \qquad (1)$$

В выражение для T входит коэффициент упругости каната. Найдем его.

Кинетическая энергия самолета в момент посадки, очевидно, равна работе силы F. Эта сила меняется с расстоянием x, пройденным самолетом по палубе авианосца. Нарисуем график зависимости F от x (рис. 4). Очевидно, работа силы F на пути L равна площади треугольника под графиком зависимости F от x, то есть $A = \frac{1}{2}kL\cdot L = \frac{kL^2}{2}$. Следовательно, $\frac{kL^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}$. Отсюда $k = \frac{Mv^2}{L^2}$.

Подставляя выражение для k в формулу (1), получим

$$T_{max} = m\frac{v^2}{L} = mg\frac{v^2}{Lg} \approx 1{,}5mg.$$

Со стороны сидения и ремней на летчика действуют взаимно-перпендикулярные силы: сила нормальной реакции сидения N и сила натяжения ремней T. Равнодействующая этих сил равна по абсолютной величине весу летчика P (вес — это сила, с которой летчик действует на сидение и ремни):

$$R = \sqrt{T_{max}^2 + (mg)^2} \approx 1{,}8\,mg.$$

Это означает, что вес пилота в 1,8 раза больше его веса в обычных условиях.

Ф144

Каким должен быть коэффициент трения стержня о пол для того, чтобы он мог стоять так, как показано на рисунке 5? Длина нити, удерживающей стержень, равна длине стержня.

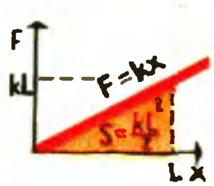


Рис. 4.

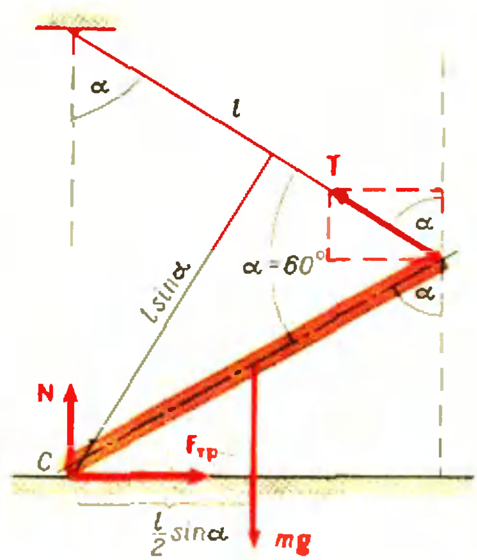


Рис. 5.

Так как стержень находится в равновесии, то суммы проекций всех действующих на него сил на вертикальное и горизонтальное направления должны быть равны нулю. Силы, действующие на стержень, показаны на рисунке 5. Значит,

$$F_{\text{тр}} - T\sin\alpha = 0, \qquad (1)$$
$$N + T\cos\alpha - mg = 0.$$

Запишем еще условие того, что стержень не вращается вокруг точки C. Для этого должна быть равна нулю сумма моментов всех сил относительно точки C:

$$Tl\sin\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что $T = \frac{1}{2}mg$. Перепишем, учитывая это, уравнения (1). Учтем еще и то, что при наименьшем коэффициенте трения, когда еще возможно равновесие стержня, $F_{\text{тр}} = kN$:

$$kN - \frac{1}{2}mg\sin\alpha = 0,$$

$$N + \frac{1}{2}mg\cos\alpha - mg = 0.$$

Отсюда

$$kN = \frac{1}{2}mg\sin\alpha,$$

$$N = mg\left(1 - \frac{1}{2}\cos\alpha\right).$$

Следовательно,

$$k = \frac{\sin\alpha}{2 - \cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ф145

Идеальный газ сначала переходит из состояния *1* (P_1, V_1, T_1) в состояние *2* (P_2, V_1, T_2). Затем из состояния *2* газ медленно адиабатически (без подвода тепла) переходит в состояние *3* (P_3, V_3, T_3). Известно, что при переходе $2 \to 3$ газ совершает работу, равную количеству тепла, сообщенному газу при переходе $1 \to 2$. Показать, что $T_3 = T_1$. Изобразить процессы $1 \to 2$ и $2 \to 3$ на плоскости VT.

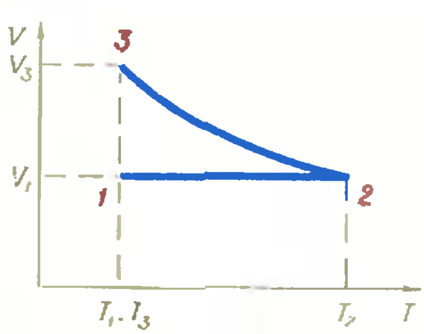


Рис. 6.

Так как при процессе $1 \to 2$ $V = V_1 = \text{const}$, то газ не совершает работы и изменение внутренней энергии газа ΔW_1 равно количеству тепла Q, сообщенному газу:

$$Q = \Delta W_1. \qquad (1)$$

Процесс $2 \to 3$ — адиабатический $(Q = 0)$, значит, работу газ совершает за счет внутренней энергии. Поэтому работа A, совершенная газом, равна изменению его внутренней энергии

$$A = \Delta W_2. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), находим, что

$$\Delta W_1 = \Delta W_2.$$

Но внутренняя энергия газа пропорциональна его абсолютной температуре. Это означает, что при процессе $2 \to 3$ и процессе $1 \to 2$ температура газа изменилась одинаково. Следовательно, $T_1 = T_3$.

Графики процессов приведены на рисунке 6. Так как при процессе $1 \to 2$ внутренняя энергия газа увеличилась, то $T_2 > T_1$. Поскольку при процессе $2 \to 3$ газ совершал работу, то $V_3 > V_1$.

Очевидно, наш ответ справедлив только в том случае, если $V_{1\to 2} = \text{const}$.

Ф146

Имеется батарея с э. д. с. $E = 100$ *в* и внутренним сопротивлением $r = 2$ *ом*. На нагрузке нужно получить напряжение $U = 20$ *в*, причем при изменении сопротивления нагрузки R от 50 *ом* до 100 *ом* напряжение на ней должно меняться не более чем на 2%. Придумайте простую схему для питания нагрузки и рассчитайте параметры этой схемы.

Одна из простейших схем — это последовательное включение сопротивления R нагрузки, сопротивления R_1 и источника (рис. 7). В этом случае, если сопротивление нагрузки равно 50 *ом*, то для того, чтобы напряжение на нагрузке было равно 20 *в* (то есть составляло 1/5 часть от э. д. с. источника E), сумма сопротивления источника и сопротивления R_1 должна быть 200 *ом*. Но в этом случае при сопротивлении нагрузки 100 *ом* напряжение на ней будет составлять

$$U = E\frac{R}{R_1 + R + r} = \frac{100}{3}\ \text{в} \approx 33{,}3\ \text{в}.$$

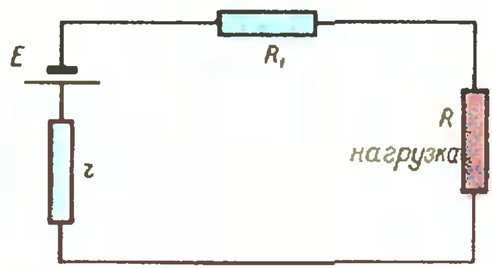


Рис. 7.

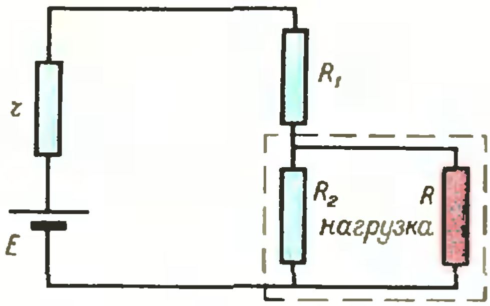


Рис. 8.

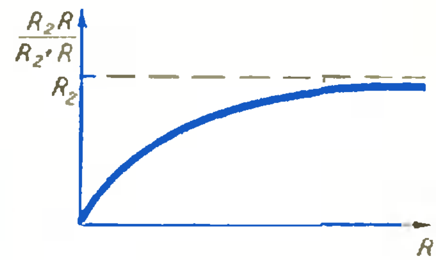


Рис. 9.

Следовательно, при такой схеме подключения нагрузки к источнику изменение напряжения на нагрузке составляет много больше 2%.

Другая схема — это схема «делителя» (рис. 8). Ясно, что при малом по сравнению с сопротивлением нагрузки сопротивлении R_2 общее сопротивление участка цепи, обведенного на рисунке рамкой, изменяется мало при изменении сопротивления нагрузки. Мало меняется и напряжение на нагрузке.

Рассчитаем параметры «делителя». Напряжение на нагрузке равно

$$U = IR_2',$$

где $I = \dfrac{E}{R_1 + r + R_2'}$ — ток в цепи и

$R_2' = \dfrac{R_2R}{R_2 + R}$ — сопротивление участка, обведенного рамкой.

$$U = \frac{E}{R_1 + r + \dfrac{R_2R}{R_2+R}} \cdot \frac{R_2R}{R_2+R}. \qquad (1)$$

В данной схеме э. д. с. источника делится между сопротивлением R_2' и сопротивлением R_1+r. Чем больше сопротивление R_2', тем больше напряжение на нагрузке. С другой стороны, сопротивление R_2' увеличивается при увеличении сопротивления нагрузки R. (График зависимости R_2' от R показан на рисунке 9.) Если при сопротивлении нагрузки $R = 50$ *ом* напряжение на нагрузке равно 20 *в*, то при сопротивлении нагрузки $R = 100$ *ом* напряжение на ней должно быть на 2% больше, то есть 20,4 *в*. Подставляя численные значения всех известных величин в формулу (1), мы получаем два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{100}{2 + R_1 + \dfrac{50R_2}{R_2+50}} \cdot \frac{50R_2}{R_2+50} = 20,\\ &\frac{100}{2 + R_1 + \dfrac{100R_2}{R_2+100}} \cdot \frac{100R_2}{R_2+100} = 20{,}4, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &250\,\frac{R_2}{R_2+50} = 2 + R_1 + 50\,\frac{R_2}{R_2+50},\\ &490\,\frac{R_2}{R_2+100} = 2 + R_1 + 100\,\frac{R_2}{R_2+100}. \end{aligned}\right\}$$

Исключая из этой системы R_1, найдем R_2:

$$R_2 = 5{,}5\ \textit{ом}.$$

Теперь, подставив это значение R_2 в любое из уравнений системы, найдем

$$R_1 \approx 17{,}8\ \textit{ом}.$$

Ф147

В модели атома Резерфорда и Бора электроны вращаются вокруг ядра на определенных круговых орбитах. При переходе электрона с одной орбиты на другую, более близкую к ядру, атом испускает фотон. Какова энергия и частота фотона, испущенного атомом водорода при переходе электрона с орбиты радиуса $r_1 = 2{,}1\cdot10^{-8}$ *см* на орбиту радиуса $r_2 = 5{,}3\cdot10^{-9}$ *см*?

Найдем вначале энергию атома в том случае, когда электрон находится на орбите радиуса r. Она складывается из потенциальной энергии

$$W_п = \varphi e = -\frac{e^2}{r}$$

(φ — потенциал электрического поля ядра на расстоянии r от него, e — заряд электрона) и кинетической энергии электрона

$$W_к = \frac{mv^2}{2}.$$

Так как электрон вращается по окружности под действием кулоновской силы

$$F = \frac{e^2}{r^2},$$

и сила F сообщает ему центростремительное ускорение $\dfrac{v^2}{r}$, то

$$F = m\frac{v^2}{r}, \quad \text{или} \quad \frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Из этого равенства следует, что

$$mv^2 = \frac{e^2}{r}.$$

Следовательно, кинетическая энергия электрона равна

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{2r}.$$

Теперь можно найти полную энергию электрона на орбите радиуса r:

$$W = W_к + W_п = \frac{e^2}{2r} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}.$$

Энергия фотона, испущенного атомом, равна:

$$E = W_1 - W_2 = -\frac{e^2}{2r_1} - \left(-\frac{e^2}{2r_2}\right) =$$
$$= \frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 16{,}3\cdot 10^{-12}\ эрг.$$

Так как энергия фотона связана с его частотой ν формулой $E = h\nu$, где h — постоянная Планка, то

$$\nu = \frac{E}{h} = 2{,}6\cdot 10^{15}\ с^{-1}.$$

Редакция получила более 600 писем. Почти во всех письмах приведены правильные решения задач **Ф139, Ф143, Ф144**. Правильные решения остальных задач прислали следующие читатели: *А. Айрапетян* (Ереван) **Ф142, Ф145, Ф147**; *А. Андреев* (Ленинград) **Ф145, Ф146**; *Ш. Атакулов* (Фергана) **Ф145, Ф146**; *А. Аляев* (Арзамас) **Ф147**; *А. Асасян* (Ереван) **Ф147**; *В. Беликов* (Москва) **Ф 142**; *И. Братовская* (Усолье-Сибирское) **Ф145**; *А. Баевский* (Гомель) **Ф138, Ф142**; *В. Буркин* (Стерлитамак) **Ф147**; *М. Большаков* (Саратов) **Ф146, Ф147**; *А. Блинов* (Москва) **Ф142**; *М. Бренерман* (Казань) **Ф145**; *Бардина* (Новокузнецк) **Ф145, Ф147**; *А. Бортников* (Краснодар) **Ф142**; *О. Белкин* (Оренбург) **Ф147**; *А. Бакулев* (Москва) **Ф142**; *Т. Вайнтрауб* (Кишинев) **Ф145—Ф147**; *В. Воробьев* (Кутаиси) **Ф147**; *В. Векштейн* (Киев) **Ф145**; *И. Васищак* (Киев) **Ф140**; *А. Варчнов* (Жуковский Московской обл.) **Ф145**; *И. Ваксер* (Минск) **Ф142**; *Ю. Горный* (Хадыженск Краснодарского края) **Ф147**; *С. Гранин* (Дзержинск) **Ф145**; *О. Глущенко* (Глухов Сумской обл.) **Ф142**; *А. Гофман* (Москва) **Ф140**; *Б. Герасимов* (Сарапул) **Ф147**; *С. Григорян* (Ереван) **Ф147**; *А. Григорьев* (Грозный) **Ф147**; *С. Городников* (Грозный) **Ф145**; *С. Дик* (Жодино Минской обл.) **Ф145**; *В. Деревегин* (Донецк) **Ф145, Ф147**; *Е. Долгов* (Москва) **Ф142, Ф145**; *В. Дашкевич* (Кировск Могилевской обл.) **Ф145**; *А. Давыдиков* (Ленинград) **Ф142**; *А. Даниэль* (Ленинград) **Ф145**; *А. Дорофеев* (с. Фокино Горьковской обл.) **Ф142**; *С. Егоров* (Климовск Московской обл.) **Ф147**; *А. Едренкин* (Москва) **Ф145, Ф147**; *В. Железный* (Ленинград) **Ф146**; *Б. Зиндельс* (Киев) **Ф145**; *А. Збоев* (пос. Медведок Кировской обл.) **Ф140**; *В. Заболоцкий* (Донецк) **Ф142, Ф147**; *И. Змушко* (пос. Ружаны Брестской обл.) **Ф145**; *А. Израилевич* (Свердловск) **Ф147**; *П. Крышеник* (Ужгород) **Ф147**; *В. Колесников* (Челябинск) **Ф142**; *С. Корнеев* (Новокузнецк) **Ф145**; *А. Кречетников* (Сумы) **Ф140**; *В. Каганер* (Москва) **Ф140—Ф142, Ф147**; *Т. Кигизина* (с. Пески Поворинского р-на Воронежской обл.) **Ф147**; *А. Карнаух* (Белгород) **Ф147**; *А. Каюпченко* (Белово Кемеровской обл.) **Ф147**; *А. Кошор* (Минск) **Ф145**; *О. Киселева* (Печора Коми АССР) **Ф142**; *С. Колонков* (Магнитогорск) **Ф147**; *В. Коротких* (Новокузнецк) **Ф147**; *С. Кондратьев* (Сызрань) **Ф147**; *А. Конюхин* (Ногинск Московской обл.) **Ф142, Ф145**; *А. Кондрашов* (Алма-Ата) **Ф147**; *С. Курень* (з/с Кущевский Краснодарского края) **Ф147**; *В. Кириллов* (Горький) **Ф145, Ф147**; *Е. Курманбаев* (Семипалатинск) **Ф147**; *И. Камынин* (Ленинград) **Ф142**; *Л. Когин* (Черновцы) **Ф145**; *Г. Левин* (Куйбышев) **Ф145**; *Г. Лутингер* (Черновцы) **Ф147**; *Е. Липовецкий* (Кишинев) **Ф147**; *А. Лукашев* (Москва) **Ф147**; *С. Лукащук* (Челябинск) **Ф145**; *Ю. Лурье* (Грозный) **Ф142, Ф145, Ф146**; *В. Лихолин* (Миргород Полтавской обл.) **Ф142**; *С. Лягушин* (Днепропетровск) **Ф138**; *А. Лунев* (д. Поздняково Курской обл.) **Ф142, Ф147**; *В. Лурье* (Челябинск) **Ф145**; *В. Левитас* (Киев) **Ф145, Ф147**; *В. Легезе* (Славянск) **Ф147**; *В. Ларин* (Подольск) **Ф147**; *А. Логунов* (Москва) **Ф145**; *Е. Михеев* (Гатчина Ленинградской обл.) **Ф145**; *Ю. Мурзакаев* (с. Осянгулово Башкирской АССР) **Ф147**; *В. Малышев* (Александров Владимирской обл.) **Ф142**; *М. Марон* (Куйбышев) **Ф142, Ф147**; *А. Мельник* (с. Серединцы Хмельницкой обл.) **Ф145—Ф147**; *И. Мацяс* (Макеевка) **Ф147**; *В. Муханов* (Канаш) **Ф145**; *В. Мухрыгин* (Краснодар) **Ф142**; *С. Молотков* (Златоуст) **Ф147**; *Д. Наумов* (Баку) **Ф145**; *С. Новиков* (Свердловск) **Ф147**; *В. Неклюдов* (Ижевск) **Ф147**; *В. Нарожный* (Ростов-на-Дону) **Ф145**; *В. Овчаров* (Сумы) **Ф147**; *С. Овчинников* (Ленинград) **Ф145**; *А. Петровский* (Сортавало КАССР) **Ф145, Ф147**; *Г. Поляков* (Бармино Горьковской обл.) **Ф147**; *В. Подвигин* (Куйбышев) **Ф145, Ф147**; *Ю. Полонский* (Зеленодольск Татарской АССР) **Ф145**; *И. Пикуш* (Орджоникидзе) **Ф138**; *С. Петров* (Ст. Русса Новгородской обл.) **Ф147**; *А. Папин* (Гомель) **Ф142**; *В. Переседов* (Похвистнево Куйбышевской обл.) **Ф145, Ф147**; *В. Приходько* (Новокузнецк) **Ф147**; *А. Романюк* (с. Куснище Волынской обл.) **Ф147**; *В. Рыкин* (с. Солоновка Смоленского р-на Алтайского края) **Ф147**; *М. Ригмант* (Магнитогорск) **Ф145, Ф147**; *А. Редченко* (с. Новопетровка Белопольского р-на Сумской обл.) **Ф138, Ф147**; *А. Резник* (Донецк) **Ф145, Ф147**; *А. Рубашкин* (Ленинград) **Ф142**; *В. Рекрут* (Киев) **Ф142**; *М. Ройзин* (Тбилиси) **Ф147**; *В. Ровинский* (Смела УССР) **Ф147**; *С. Свинолупов* (Белебей Башкирской АССР) **Ф145**; *В. Сидельников* (пос. Тим Курской обл.) **Ф145**; *М. Сидоров* (Москва) **Ф142, Ф147**; *А. Сергеев* (Ленинград) **Ф142, Ф145**; *В. Степанов* (Москва) **Ф140**; *Я. Симкин* (Москва) **Ф145—Ф147**; *О. Сахаров* (Ломоносов Ленинградской обл.) **Ф145, Ф147**;

И. Ш. Слободецкий

(окончание списка в «Кванте» № 11, 1972)

Я. И. Груденов

Метод решения задач «с конца»

Обычно решение задачи или доказательство теоремы мы проводим от известного к неизвестному, от данного к искомому. Но можно действовать и иначе. Здесь мы рассмотрим метод решения задач «с конца», когда рассуждения проводятся от неизвестного к известному, от искомого к данному.

Общая схема

Пусть требуется доказать некоторое утверждение A. Предположим, что оно верно, и на основе данных задачи и известных теорем попытаемся получить из A верное следствие. При этом возможно несколько случаев.

1. Получено неверное следствие. Это означает, что наше предположение о справедливости утверждения A ошибочно. Решение задачи на этом закончено — мы обнаружили, что A неверно.

2. Получено верное следствие. В этом случае следует обязательно проверить обратимость рассуждений, потому что из неверного утверждения (например, $a = -a$, $a \neq 0$) тоже можно получить верное следствие ($a^2 = a^2$).

а) Если все расссуждения обратимы, то A верно.

б) Если среди рассуждений есть необратимые (например, на некотором этапе мы возвели равенство в квадрат), то приходится применять другие методы отыскания решения задачи.

3. Если верное следствие получить не удается, то также приходится перейти к другим методам.

Два указания

1. В получаемых промежуточных выражениях желательно уменьшать число параметров, а затем упрощать эти выражения.

2. Если задача не содержит лишних условий *), то необходимо использовать все данные задачи.

Примеры

Пример 1. *В прямоугольном треугольнике ABC катет AC в 3 раза больше катета AB. Точками K и M катет AC разделен на три равные части. Доказать, что $\angle AMB + \angle AKB + \angle ACB = 90°$.*

Решение. Пусть $\angle AMB = \alpha$, $\angle AKB = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ (рис. 1). Предположим, что

$$\alpha + \beta + \gamma = 90° \qquad (1)$$

или, так как $\alpha = 45°$,

$$\beta + \gamma = 45°. \qquad (1а)$$

Тогда

$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \operatorname{tg} 45°, \qquad (2)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma} = 1. \qquad (2а)$$

*) Нахождение лишнего условия является большим плюсом решения, но обычно конкурсные задачи лишних условий не содержат.

Равенство (2) или (2а) верно, так как

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{AB}{AK}=\frac{1}{2},\qquad \operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{3}$$

и

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

Учащиеся на этом обычно заканчивают решение задачи, что является

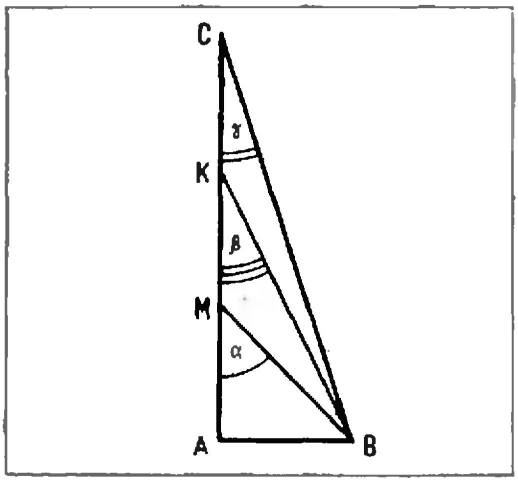


Рис. 1.

грубой ошибкой. Начиная обращать преобразования, мы замечаем, что из справедливости равенства (2) следует вовсе не равенство (1а), а зависимость

$$\beta+\gamma=45^\circ+180^\circ\cdot n,$$

где $n=0;\quad \pm1;\quad \pm2;\quad \pm3;\ \ldots$

Но из треугольников AKB и ACB мы находим, что $0<\beta<45^\circ$; $0<\gamma<45^\circ$, следовательно,

$$0<\beta+\gamma<90^\circ. \qquad (3)$$

Поэтому из соотношений (2) и (3) следует, что $\beta+\gamma=45^\circ$, и, так как $\alpha=45^\circ$, то $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$.

Пример 2. *Доказать, что во всяком треугольнике* $R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S}$, *где* a, b, c *— стороны треугольника,* S *— его площадь,* R *— радиус описанного круга.*

Решение. Предположим, что верно равенство:

$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S}. \qquad (4)$$

Уменьшим число параметров:

$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot\frac{1}{2}\,b\cdot c\cdot\sin A},\qquad R=\frac{a}{2\cdot\sin A},$$

откуда

$$2R=\frac{a}{\sin A},$$

что верно по теореме синусов. Все преобразования легко обратить, следовательно, равенство (4) доказано.

Пример 3. *Стороны треугольника* a, b, c ($a<b<c$) *образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что* $ac=6Rr$, *где* R *— радиус описанного, а* r *— радиус вписанного в треугольник круга.*

Решение. Пусть верно равенство $ac=6Rr$. Уменьшим число параметров, выразив R и r через стороны треугольника: $R=\frac{abc}{4S}$, $r=\frac{S}{p}$, где S — площадь треугольника, p — его полупериметр. Получим:

$$ac=6\cdot\frac{abc}{4\cdot S}\cdot\frac{S}{p},\qquad 1=\frac{3b}{2p},$$

$$a+b+c=3b,\ \frac{a+c}{2}=b,$$

что верно, так как a, b, c составляют арифметическую прогрессию.

Все эти преобразования можно провести в обратном порядке, следовательно, доказываемое соотношение верно.

Пример 4. *Доказать, что произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон* (теорема Птолемея).

Решение. Предположим, что верно равенство (рис. 2):

$$AC\cdot BM=AM\cdot BC+AB\cdot CM. \qquad (5)$$

Уменьшим число параметров, выразив все отрезки через какие-либо другие элементы. Необходимость использования при этом всех данных задачи (четырехугольник — вписанный) наталкивает нас на мысль применить теорему синусов:

$$\begin{aligned}
AC &= 2R\cdot\sin(\varphi+\beta);\\
BM &= 2R\cdot\sin(\alpha+\varphi);\\
AM &= 2R\cdot\sin\alpha;\\
BC &= 2R\cdot\sin\beta;\\
AB &= 2R\cdot\sin\varphi;\\
CM &= 2R\cdot\sin[\pi-(\alpha+\beta+\\
&+\varphi)] = 2R\cdot\sin(\alpha+\beta+\varphi).
\end{aligned}$$

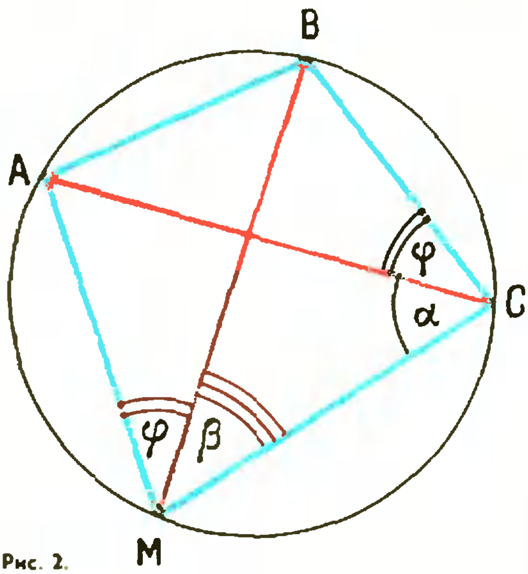


Рис. 2.

Подставляя эти выражения в равенство (5) и сокращая на $4R^2\neq 0$, имеем:

$$\sin(\varphi+\beta)\cdot\sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha\times$$
$$\times\sin\beta+\sin\varphi\cdot\sin(\alpha+\beta+\varphi).$$

Последнее равенство *справедливо* для любых углов α, β и φ (проверьте это самостоятельно, расписав функции суммы углов через функции углов).

Обратный переход не составляет труда, поскольку по условию четырехугольник — вписанный. Следовательно, соотношение (5) *верно*.

П р и м е р 5. *Стороны треугольника связаны соотношением*

$$a^2 = bc + c^2.$$

Доказать, что угол A вдвое больше угла C.

Р е ш е н и е. Предположим, что

$$\angle A = 2\angle C. \qquad (6)$$

Чтобы использовать соотношение, данное в условии задачи, углы в равенстве (6) *целесообразно выразить* через стороны треугольника:

$$\sin A = \sin 2C = 2\sin C\cdot\cos C, \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab};\\
\sin C &= \frac{c}{2R},\\
\sin A &= \frac{a}{2R};
\end{aligned}\right| \qquad (8)$$

где R — радиус описанного круга. Подставляя найденные выражения в равенство (7) и упрощая, получим:

$$a^2b = c(a^2+b^2-c^2).$$

Уменьшим число параметров, воспользовавшись условием задачи:

$$(bc+c^2)\,b = c\,[(bc+c^2)+b^2-c^2],$$

что верно.

При попытке обратить рассуждения нам потребуется *перейти* от равенства (7) к равенству (6), но это не всегда возможно. Например, если $A = 88^\circ$, $2C = 92^\circ$, то $\sin A = \sin 2C$, но $A\neq 2C$. Из равенства (7) будет *следовать* равенство (6), если только углы A и $2C$ принадлежат интервалу монотонности синуса. Однако из условия задачи $a^2 = bc + c^2$ мы имеем лишь, что $a > c$ и $\angle A > \angle C$, то есть $0 < A < 180^\circ$, $0 < 2C < 180^\circ$.

Но все же наши рассуждения *не* пропали бесполезно. Так как углы A и $2C$ заключены в интервале $(0, 180^\circ)$, то есть в интервале монотонности косинуса, то лучше было бы перейти от *равенства (6) к равенсту* $\cos A = \cos 2C$. Проверьте, что этот способ позволяет получить решение задачи.

П р и м е р 6. *Доказать, что*

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 2\operatorname{tg}\alpha, \qquad (9)$$

если

$$3\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta). \qquad (10)$$

Р е ш е н и е. *Предположим*, что равенство (9) верно. Чтобы воспользоваться условием (10), надо в равенстве (9) перейти к синусам соответствующих аргументов:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = 2\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

откуда

$$\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha = 2\sin\alpha \times \times \cos(\alpha+\beta);$$

$$\left(\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k;\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\right);$$

$$\frac{1}{2}[\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta] = = 2\cdot\frac{1}{2}[\sin(2\alpha+\beta)+\sin(-\beta)];$$

$$3\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta),$$

что верно по условию задачи.

Эти преобразования можно провести в обратном порядке (при всех допустимых значениях аргументов), поэтому равенство (9) верно.

П р и м е р 7. *Доказать, что при всех допустимых значениях* α *имеет место неравенство*

$$|\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha| > |\sin\alpha + \cos\alpha|. \quad (11)$$

Р е ш е н и е. Предположим, что неравенство (11) верно. Уменьшим число функций:

$$\left|\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right| > |\sin\alpha+\cos\alpha|; \quad (12)$$

$$\frac{1}{|\sin\alpha\cdot\cos\alpha|} > |\sin\alpha+\cos\alpha|. \quad (13)$$

Чтобы сравнить по величине эти выражения, желательно выразить их через одну функцию, например, через синус:

$$\frac{2}{|\sin 2\alpha|} > \sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|. \quad (14)$$

Но $|\sin 2\alpha|\leqslant 1$, $\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 1$, поэтому $\frac{2}{|\sin 2\alpha|}\geqslant 2$, а $\sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}$, и неравенство (14) верно при всех допустимых значениях α.

Из неравенства (14) следует (13), а значит, и (12), а из неравенства (12) следует (11), поэтому неравенство (11) верно при всех $\alpha\neq\frac{\pi k}{2}$.

Приведенные рассуждения показывают, что можно доказать более сильное неравенство

$$|\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha|\geqslant\sqrt{2}\,|\sin\alpha+\cos\alpha|.$$

П р и м е р 8. *Доказать, что во всяком треугольнике*

$$h_a > \sqrt{p(p-a)}, \quad (15)$$

где h_a — *высота, опущенная на сторону* a, p — *полупериметр треугольника.*

Р е ш е н и е. Пусть верно неравенство (15). Уменьшим число параметров:

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\frac{1}{2}a} > \sqrt{p(p-a)}.$$

Мы воспользовались формулами

$$S_\Delta = \frac{1}{2}h_a\cdot a,$$

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} > \frac{1}{2}a.$$

Обе части неравенства положительны — их можно возвести в квадрат

$$(p-b)(p-c) > \frac{a^2}{4},$$

$$\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2} > \frac{a^2}{4},$$

$$a^2+ab-ac+ac+bc-c^2- -ab-b^2+bc > a^2,$$

$$2bc-c^2-b^2>0,$$

$$-(b-c)^2>0,$$

что неверно. Следовательно, наше предположение о справедливости неравенства (15) ложно.

На этом решение задачи можно считать оконченным, ибо мы доказали, что формула (15) неверна. Впрочем, доказав, что формула (15) неверна, мы тем самым доказали, что всегда верна формула

$$h_a \leqslant \sqrt{p(p-a)}.$$

Попробуйте выяснить, когда в последней формуле имеет место равенство. Здесь наш метод решения задачи «с конца» превратился в метод «от противного».

С описанным методом имеет некоторое сходство такой прием решения геометрических задач, когда искомые и другие неизвестные элементы (отрезки, углы и т. д.) обозначают буквами $x, y, z, \ldots$ и оперируют с ними как с известными.

Пример 9. *В сегмент, дуга которого содержит $120°$, вписан квадрат. Найти сторону квадрата, если радиус окружности равен R.*

Решение. Пусть $ABCK$ — квадрат, $\smile EF = 120°$, O — центр окружности (рис. 3). Обозначим

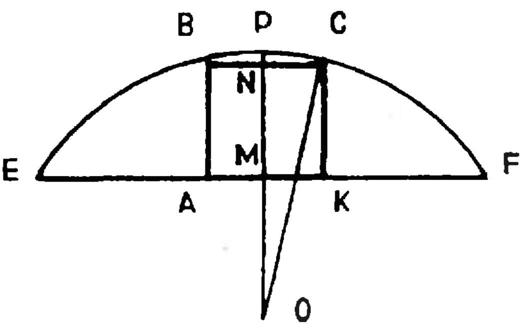


Рис. 3.

BC через $2x$ и проведем $OP \perp EF$. Тогда $ON = \sqrt{R^2 - x^2}$, $OM = \frac{1}{2}R$, $MN = 2x$,

$$OM = ON - MN.$$

Имеем уравнение

$$\frac{R}{2} = \sqrt{R^2 - x^2} - 2x,$$

решив которое, получим $x = \frac{R(\sqrt{19} - 2)}{10}$

Ответ: $\frac{R(\sqrt{19} - 2)}{5}$.

Многие учащиеся допускают ошибки не только при решении задач, но и при изложении теоретических вопросов. Вот как, например, они доказывают известное тождество:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

(при $x > 0$ и $y > 0$).

«Перенесем $\log_a y$ в левую часть и воспользуемся ранее доказанной теоремой:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) + \log_a y = \log_a x;$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \log_a x;$$

$$\log_a x = \log_a x.$$

Получили верное равенство, а значит, исходная формула доказана».

Ясно, что этими рассуждениями формула еще не доказана. Учащиеся обычно даже не понимают сущности допускаемой ошибки и в оправдание ссылаются на школьный учебник, где формула доказана, мол, точно так же. Для них осталась незамеченной ссылка в учебнике на равносильность формул.

Упражнения

1. В равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b угол при вершине равен $20°$. Доказать, что $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

2. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике биссектрисы углов, прилежащих к одной стороне, образуют угол, равный полусумме двух других углов.

3. Доказать неравенство

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} > 1 + \operatorname{ctg} \varphi \quad \text{при } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

4. Доказать неравенство $(x + y)(x + y + 2\cos x) + 2 \geqslant 2\sin^2 x$. При каких значениях x и y достигается равенство?

5. В треугольнике ABC углы A, B и C образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Доказать, что

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

6. Доказать, что

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} + \frac{1}{\log_{10} \pi} > 4.$$

7. Доказать, что максимальная полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна $\frac{M^2}{24}$, где M — сумма длин всех ребер параллелепипеда.

8. Верно ли, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с произведением оснований?

9. Проверьте, верно ли доказано следующее неравенство:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant \sin\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta - 1?$$

«Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta - 2\sin\alpha - 2\sin\beta + 2 \geqslant 0,$$

или

$$(\sin\alpha - 1)^2 + (\sin\beta - 1)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \geqslant 0,$$

которое очевидно».

10. Верно ли, что $\sin(\cos\varphi) = \cos(\sin\varphi)$?

РАБОТА, ЭНЕРГИЯ, МОЩНОСТЬ

И. А. ЗАЙЦЕВ

Если на движущееся тело действует постоянная сила **F** под углом α к направлению перемещения **s** (рис. 1), то эта сила совершает работу

$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha, \qquad (1)$$

где F и s — модули векторов **F** и **s**.

Работа силы равна произведению модулей векторов силы и перемещения тела на косинус угла между ними.

Рассмотрим подробно эту хорошо известную формулу. Если угол $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha > 0$ и работа силы положительна. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то есть когда сила **F** перпендикулярна перемещению тела **s**, работа, совершенная силой **F**, равна нулю. (В частности, равна нулю работа силы, сообщающей телу центростремительное ускорение. При равномерном движении тела по окружности сила, действующая на него, перпендикулярна скорости тела.) Если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$ и работа силы отрицательна. Разберемся, что это означает.

Возьмем простой случай, когда сила **F** параллельна вектору перемещения тела. В этом случае тело движется с ускорением $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$, направление которого совпадает с направлением вектора силы. Если направление вектора силы совпадает с направлением перемещения тела, то скорость тела увеличивается, а сила **F** совершает положительную работу. Если же вектор силы направлен противоположно вектору перемещения тела, то ускорение тела направлено противоположно вектору скорости и абсолютное значение скорости тела уменьшается. Но работа силы в этом случае, как следует из формулы (1), отрицательна $(\alpha > \frac{\pi}{2}$ и $\cos\alpha < 0)$. Следовательно, отрицательна работа той силы, которая тормозит движение тела, уменьшает его скорость.

Произведение $F \cdot \cos\alpha$ — это величина проекции вектора силы на ось, вдоль которой направлен вектор перемещения тела (рис. 1). Поэтому можно сказать, что работа силы **F** равна произведению модуля вектора перемещения тела и проекции вектора силы **F** на ось, параллельную вектору перемещения.

Воспользовавшись этой формулировкой, можно легко доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Если на тело действует несколько сил, то полная работа, совершенная этими силами, равна сумме работ, совершенных отдельными силами.*

Действительно, если на тело действует несколько сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . , то эти силы можно всегда заменить их равнодействующей $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots$ Поэтому общая работа всех сил равна работе равнодействующей:

$$A = R \cdot s \cdot \cos\alpha = s \cdot \text{пр.}\mathbf{R}.$$

Так как проекция вектора **R** на любую ось равна сумме проекций

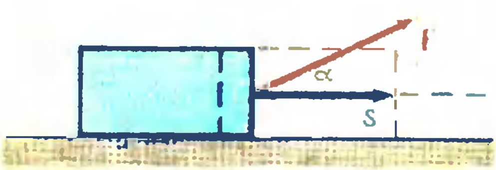


Рис. 1.

на эту ось векторов $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, . . . , то

$$A = s\,(\text{пр.}\,\mathbf{F}_1 + \text{пр.}\,\mathbf{F}_2 + \ldots) = \\ = A_1 + A_2 + \ldots$$

В частности, если на тело действуют две силы, равные по абсолютной величине и направленные в противоположные стороны, то их работа равна нулю. Одна из этих сил совершает некоторую положительную работу, другая — такую же отрицательную.

Нетрудно доказать еще одну теорему.

Теорема 2. *Если тело совершает последовательно несколько перемещений:* $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, . . . , *так что* $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \ldots = \mathbf{s}$, *то работа силы* $\mathbf{F}$ *равна*

$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha,$$

где α — *угол между векторами* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{s}$.

Заметим, что произведение $s \cdot \cos\alpha$ равно проекции вектора перемещения тела на вектор силы (рис. 2) (правильнее сказать — проекции вектора перемещения тела на ось, параллельную вектору силы). Полная работа, совершенная силой F, равна

$$A = F \cdot \text{пр.}\,\mathbf{s}_1 + F \cdot \text{пр.}\,\mathbf{s}_2 + \ldots$$

Но сумма проекций векторов $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, . . . на любую ось равна проекции на эту ось вектора $\mathbf{s}$. Следовательно,

$$A = F \cdot \text{пр.}\,\mathbf{s}.$$

Теперь мы можем сделать вывод: если тело двигалось так, что его полное перемещение равно нулю (тело вернулось в ту же точку, из которой начало двигаться) и во время движения на тело действовала постоянная сила $\mathbf{F}$, то работа силы равна нулю.

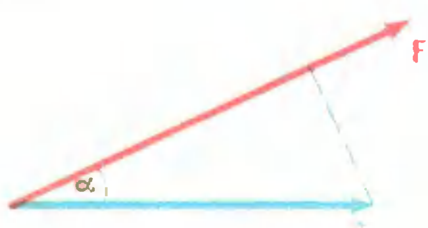


Рис. 2.

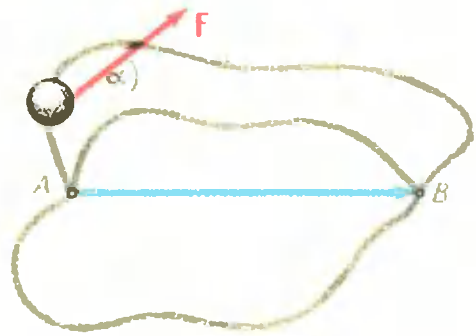


Рис. 3.

Задача 1. *Доказать, что работа постоянной силы не зависит от траектории движения тела.*

Как бы ни двигалось тело от точки A к точке B, его перемещение равно вектору $\mathbf{AB}$ (рис. 3). Следовательно, работа силы $\mathbf{F}$ равна $F \cdot AB \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{F}$. Это произведение не зависит от траектории тела.

До сих пор сила, действующая на тело, была постоянна. Рассмотрим теперь работу переменной силы. В этом случае мы уже не можем воспользоваться формулой (1). Для того чтобы определить работу переменной силы, нужно разбить все движение тела на малые перемещения, такие, чтобы силу на этих перемещениях можно было считать постоянной. На каждом из таких перемещений $\Delta\mathbf{s}_i$ работа равна

$$A_i = F_i \cdot \Delta s_i \cdot \cos\alpha_i.$$

Полная работа равна сумме работ на отдельных перемещениях:

$$A = \sum A_i.$$

Ясно, что при таком вычислении работы мы получим приближенный результат. Если, скажем, на перемещении $\Delta\mathbf{s}_i$ сила меняется на 1% (вернее, не сила, а произведение $F \cdot \cos\alpha_i$), то точность наших вычислений тоже будет составлять 1%. Если нам нужна бо́льшая точность, то движение тела следует разбить на еще ме́ньшие перемещения.

Практически важен случай, когда тело движется прямолинейно, а сила, действующая на тело, меняется по

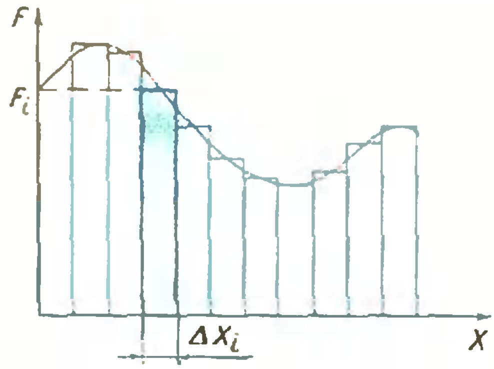


Рис. 4.

абсолютной величине, в то время как ее направление остается все время одним и тем же. Пусть, например, тело перемещается из одной точки в другую по прямой, а сила **F**, действующая на тело, направлена всегда вдоль этой прямой, но меняется от точки к точке так, как показано на графике зависимости силы от координаты x (рис. 4). Найдем работу этой силы. Разобьем движение тела на маленькие участки Δx_i. На каждом из таких участков силу будем считать постоянной и равной некоторому среднему значению $\mathbf{F}_i$. Тогда работа на участке Δx_i —

$$A_i \approx F_i \cdot \Delta x_i,$$

то есть равна площади прямоугольника со сторонами F_i и Δx_i. Работа на всем пути, очевидно, равна сумме площадей таких прямоугольников. Так как при уменьшении участков Δx_i площадь всех заштрихованных прямоугольников будет стремиться к площади фигуры под графиком силы, то ясно, что работа силы равна в данном случае площади фигуры под графиком зависимости силы от координаты. Если этот график проходит ниже оси X, сила **F** отрицательна. Это означает, что вектор силы направлен противоположно вектору перемещения тела. Отрицательна и работа этой силы. Значит, при вычислении работы площадь фигуры теперь уже «над графиком силы» нужно взять со знаком минус. Точно так же работу нужно считать отрицательной, если график силы лежит выше оси X, но изменение координаты тела отрицательно.

Итак, мы знаем, как находить работу переменной силы. Найдем таким способом работу силы упругости пружины.

З а д а ч а 2. *Пружина, находящаяся между телом и упором (рис. 5), сжата на длину Δl. Жесткость пружины k. Тело может без трения двигаться по гладкой плоскости. В начальный момент концы пружины соединены нитью. Затем нить пережигают. Какую работу совершает сила упругости пружины к тому моменту, когда тело проходит положение «равновесия», при котором пружина не деформирована?*

Какую работу совершает сила упругости к моменту, когда тело оказывается справа от положения равновесия на расстоянии Δl_1 от него.

Нарисуем график зависимости силы упругости пружины от положения тела (его координаты x) в системе координат, начало которой совпадает с положением тела в тот момент, когда пружина не деформирована, а направление оси OX совпадает с направлением движения тела после пережигания нити (рис. 6). Сила

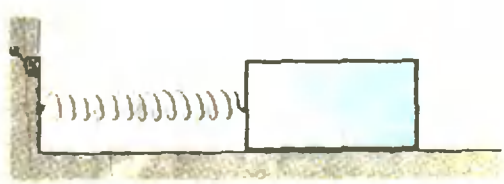


Рис. 5.

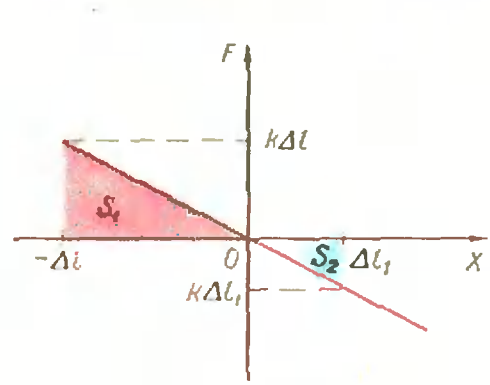


Рис. 6.

упругости пружины пропорциональна деформации пружины:

$$F = -kx.$$

Когда координата тела отрицательна, сила положительна, и наоборот.

Работа A_1, совершенная силой упругости пружины к тому моменту, когда тело окажется в положении равновесия, равна площади S_1 розового треугольника

$$A_1 = \frac{k\Delta l \cdot \Delta l}{2} = k\frac{(\Delta l)^2}{2}.$$

При дальнейшем движении тела направление силы упругости пружины противоположно направлению движения тела; работа отрицательна. Чтобы найти работу силы упругости к моменту, когда координата тела станет равной Δl_1, нужно из площади розового треугольника вычесть площадь синего:

$$A_2 = k\frac{(\Delta l)^2}{2} - k\frac{(\Delta l_1)^2}{2}.$$

При $\Delta l = \Delta l_1$ $A_2 = 0$.

Рассмотрим теперь другой вопрос — как меняется состояние движущегося тела, если на него действует сила $\mathbf{F}$, совершающая работу A. Будем считать, что тело движется прямолинейно и сила $\mathbf{F}$ направлена вдоль линии движения тела. Если перемещение тела равно $\mathbf{s}$, то

$$A = F \cdot s.$$

Сила F сообщает телу ускорение $a = \frac{F}{m}$, где m — масса тела. Поэтому

$$A = mas.$$

Но как мы знаем из кинематики, $as = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$, где v_0 — начальная, а v — конечная скорости тела. Следовательно,

$$A = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Величина $\frac{mv^2}{2}$ — это кинетическая энергия тела. Следовательно, работа силы $\mathbf{F}$ равна изменению кинетической энергии тела.

З а д а ч а 3. *На тело, описанное в предыдущей задаче, кроме силы упругости действует еще сила трения тела о плоскость. Масса тела равна m, коэффициент трения тела о плоскость равен f. Каким в этом случае будет максимальное отклонение тела Δl_1 от положения, при котором пружина не растянута?*

В тот момент, когда координата тела $x = \Delta l_1$, скорость тела равна нулю, так же как и в начальный момент движения тела. Следовательно, равно нулю и изменение кинетической энергии тела, и работа сил, действующих на тело.

Сила упругости пружины совершает работу

$$A_1 = \frac{k(\Delta l)^2}{2} - \frac{k(\Delta l_1)^2}{2},$$

а сила трения — работу

$$A_2 = -mgf(\Delta l + \Delta l_1).$$

(Работа этой силы отрицательна, так как она направлена против движения тела.) Поэтому

$$\frac{k(\Delta l)^2}{2} - \frac{k(\Delta l_1)^2}{2} - mgf(\Delta l + \Delta l_1) = 0,$$

или

$$\frac{k}{2}(\Delta l + \Delta l_1)(\Delta l - \Delta l_1) = mgf(\Delta l + \Delta l_1),$$

отсюда

$$\Delta l_1 = \Delta l - \frac{2mgf}{k}.$$

До сих пор, говоря о работе, мы подчеркивали, что это работа силы. Но, как мы знаем, сила действует на данное тело со стороны другого тела. Поэтому вместо того, чтобы говорить о работе силы, можно говорить о работе тела, действующего на движущееся тело с данной силой, или просто о работе тела.

Движущееся тело может совершать работу, например, поднимать другое тело. При этом скорость движущегося тела и его кинетическая энергия будут меняться, причем работа, совершенная движущимся телом, равна изменению его кинетической энергии.

Теперь рассмотрим другой случай. Пусть у нас имеются два тела M_1 и M_2, которые притягиваются друг к другу, причем тело M_2 закреплено неподвижно, а тело M_1 движется из точки B (в которой оно было неподвижно) в точку A (рис. 7). (На рисунке показана только сила, действующая на тело M_1.) Двигаясь под действием силы F, тело M_1 может совершить работу

$$A = F \cdot s$$

(для простоты мы считаем, что сила F постоянна).

Но тело M_1 не обладало запасом кинетической энергии и совершило работу благодаря взаимодействию с телом M_2. Поэтому говорят, что тело M_1 обладает энергией, которая определяется относительным положением тел M_1 и M_2. Эту энергию называют потенциальной энергией. Если кинетической энергией обладает тело, то потенциальную энергию уже нельзя отнести к конкретному телу. Потенциальной энергией обладает система тел. Часто, правда, когда перемещение одного из тел и изменение его кинетической энергии мало по сравнению с изменениями движения второго тела, говорят, что потенциальная энергия относится к одному телу — к тому, которое совершает большее перемещение. Например, говорят о потенциальной энергии тела, взаимодействующего с Землей, вместо того чтобы говорить о потенциальной энергии системы тело — Земля.

Потенциальной энергией обладает и может совершить работу любое упруго деформированное тело (система, состоящая из частей упруго деформированного тела), тело, взаимодействующее с Землей (система тело — Земля) и вообще любая система тел, взаимодействующих друг с другом силами упругости или силами тяготения или электрическими кулоновскими силами.

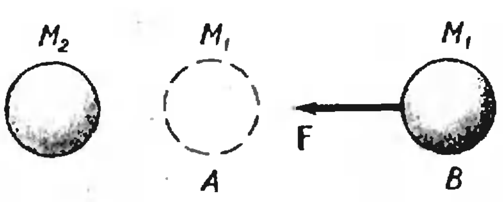


Рис. 7.

Потенциальная энергия, которой обладает тело, имеет важное отличие от кинетической энергии. Если тело неподвижно ($v=0$), то его кинетическая энергия равна нулю и тело не может совершить работу за счет изменения его кинетической энергии — ведь кинетическая энергия равна $\frac{mv^2}{2}$ и не может быть отрицательной. Если она равна нулю, то уменьшиться уже не может. В то же время, если тело находится на высоте H над поверхностью Земли, то, падая, оно может совершить работу, равную работе силы тяжести:

$$A = mgH.$$

Поэтому можно сказать, что тело обладает потенциальной энергией mgH. Но тело может упасть и в шахту глубиной h. Тогда оно сможет совершить работу $mg(H+h)$ и нам нужно считать, что потенциальная энергия равна $mg(H+h)$. Так чему же она равна на самом деле?

Дело в том, что потенциальная энергия определяется, если мы задали положение тел, при котором, как мы считали, потенциальная энергия равна нулю. Это, однако, не означает, что, двигаясь из этого положения, тело не может совершить работу. Просто потенциальная энергия тела будет уменьшаться, становясь отрицательной. Какое из положений тела принять за положение «нулевой потенциальной энергии» — не имеет значения: во все законы и уравнения входит изменение потенциальной энергии, а оно как раз и не зависит от выбора «нуля» потенциальной энергии. Для кинетической энергии «нулем» — «нулевым состоянием» — является состояние, в котором тело неподвижно.

Итак, работа, которую может совершить тело, вначале неподвижное, равна изменению его потенциальной энергии. Если тело M_1 взаимодействует только с телом M_2, то есть движется только под действием силы **F**, то его потенциальная энергия уменьшается, то есть уменьшается его возможность совершить работу. Зато в этом случае увеличивается кинетическая энергия тела, причем изменение кинетической энергии равно работе силы **F**, а изменение потенциальной энергии тоже равно работе силы **F**, но оно отрицательно.

Это означает, что *изменение потенциальной энергии равно по величине изменению кинетической энергии, так что их сумма остается все время постоянной.*

Мы пришли к очень важному выводу — к закону сохранения механической энергии изолированной системы. Изолированной, так как нам было важно, чтобы на тело M_1 не действовали другие тела, кроме тела M_2, то есть чтобы тела M_1 и M_2 составляли изолированную систему. Если на данную систему действуют внешние по отношению к ней силы, то полная энергия системы меняется на величину работы этих сил.

Решим теперь несколько задач.

Задача 4. *Веревка перекинута через блок, так что концы веревки находятся на одинаковой высоте от земли (рис. 8). Затем блок слегка поворачивают и веревка начинает соскальзывать с блока под действием силы тяжести. Какую скорость будет иметь веревка в тот момент, когда она полностью слетит с блока? Длина веревки l, масса m.*

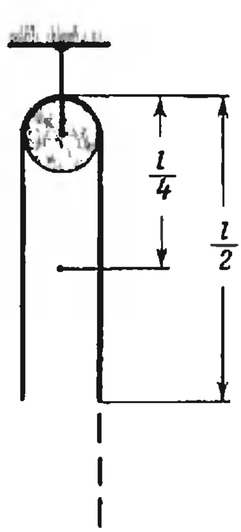


Рис. 8.

В начальный момент центр масс веревки находится на расстоянии $\frac{l}{4}$ от блока. В тот момент, когда веревка соскользнет с блока, ее центр масс будет находиться на расстоянии $\frac{l}{2}$ от блока. При этом потенциальная энергия системы веревка — Земля изменится на величину

$$mg\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{4}\right)=mg\frac{l}{4}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$mg\frac{l}{4}=\frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда

$$v=\sqrt{\frac{gl}{2}}.$$

Задача 5. *Сила F поднимает груз массы m на высоту H. Какую работу совершает эта сила? Как меняется потенциальная энергия тела?*

Работа силы F равна $F\cdot H$, а изменение потенциальной энергии — величине mgH, m — масса тела. Разница $FH-mgH$ пошла на увеличение кинетической энергии тела.

Задача 6. *Какую мощность должен иметь насос для того, чтобы перекачивать Q литров воды за 1 секунду из колодца, глубина которого h, на поверхность земли? Площадь сечения трубы, через которую перекачивается вода, s.*

Вода должна иметь в трубе скорость $v=\frac{Q}{s}$. Это означает, что насос должен за время t совершить работу, равную изменению потенциальной энергии массы воды $m=Q\rho t$:

$$\Delta W_п = mgh$$

(ρ — плотность воды) и изменению

ее кинетической энергии

$$\Delta W_к = \frac{mv^2}{2};$$

$$A = \frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{Q^3\rho t}{2s^2} + Q\rho tgh.$$

Мощность насоса равна работе, которую он совершает за 1 секунду:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{Q^3\rho}{2s^2} + Q\rho gh.$$

Энергия, так же как и работа, зависит от выбора системы координат. Это естественно — ведь от системы координат зависит как скорость тела, так и его перемещение.

Решим в заключение задачу, в которой выбор системы координат существен.

З а д а ч а 7. *Два одинаковых по величине и знаку заряда q находятся на расстоянии R друг от друга. На какое минимальное расстояние r могут сблизиться эти заряды, если в начальный момент один из зарядов покоится, а другой движется ему навстречу со скоростью v?*

Часто эту задачу решают, пользуясь системой координат, связанной с зарядом, который вначале покоился. В этой системе координат энергия системы вначале равна сумме ее потенциальной энергии $W_п = \frac{q^2}{R}$ и кинетической энергии движущегося заряда $\frac{mv^2}{2}$

$$W = \frac{q^2}{R} + \frac{mv^2}{2}.$$

В тот момент, когда заряды находятся на минимальном расстоянии друг от друга, они в этой системе координат неподвижны и энергия системы равна ее потенциальной энергии $\frac{q^2}{r}$. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{q^2}{r} = \frac{q^2}{R} + \frac{mv^2}{2},$$

отсюда

$$r = R\frac{1}{1 + \frac{mv^2R}{2q^2}}.$$

Однако, это решение неверное. Система координат, связанная с движущимся неравномерно зарядом, неинерциальна. В ней нельзя пользоваться ни II законом Ньютона, ни законом сохранения энергии.

Решим эту задачу, воспользовавшись неподвижной системой координат. Здесь в начальный момент заряды имеют скорости

$$v_1 = 0 \text{ и } v_2 = v,$$

а энергия системы равна

$$\frac{q^2}{R} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{q^2}{R} + \frac{mv^2}{2}.$$

Из закона сохранения импульса следует, что в тот момент когда расстояние между зарядами минимально, оба заряда движутся с одинаковыми скоростями, равными $\frac{v}{2}$. Энергия системы равна

$$\frac{q^2}{r} + \frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} + \frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} = \frac{q^2}{r} + \frac{mv^2}{4}.$$

Из закона сохранения энергии найдем:

$$r = R\frac{1}{1 + \frac{mv^2R}{4q^2}}.$$

Упражнения

1. Колесо катится без проскальзывания со скоростью v. Найти кинетическую энергию этого колеса. Масса колеса равна m.

2. Шарик радиуса $r = 15$ *мм* и массой $m = 5$ *г* погружен в воду на глубину $h = 30$ *см*. Когда шарик отпустили, он выпрыгнул из воды на высоту $h_1 = 10$ *см*. Какая часть механической энергии шарика перешла в тепло из-за трения шарика о воду?

3. Найти, воспользовавшись законом сохранения энергии, скорость истечения жидкости из отверстия у дна сосуда, если уровень жидкости находится на высоте h от дна.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО ФИЗИКЕ В МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ В 1972 ГОДУ

Билет 1

1. При скоростном спуске лыжник шел вниз по склону $\varphi = 45°$, не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег $k = 0,1$. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости: $F_c = \alpha v^2$, где α — постоянная величина, равная $0,7\ \frac{н}{(м/с)^2}$. Какую максимальную скорость мог развить лыжник, если его масса $m = 90$ *кг*?

2. На VT-диаграмме изображен замкнутый процесс (цикл), который совершает некоторая масса азота (рис. 1). Известно, что минимальное давление газа в этом процессе $P_{min} = 3,28$ *атм*. Определить массу газа и его давление в точке *1*. Величины T_1, T_2, V_1 и V_2 указаны на рисунке.

3. Две параллельные сетки подключены к батарее с э. д. с. $E = 10$ *в*, как показано на рисунке 2. Слева под углом 45° к сеткам падает параллельный пучок электронов с начальной энергией $U_0 = 10$ *эв*. На какой угол α отклонится пучок, пройдя сетки?

4. Две собирающие линзы с одинаковыми фокусными расстояниями F расположены на расстоянии $F/2$ друг от друга (рис. 3). С помощью этой системы получены два изображения Солнца — одно образовано лучами, которые после преломления в первой линзе миновали вторую, другое — лучами, прошедшими последовательно через обе линзы. При каком отношении диаметров линз освещенности изображений будут равны?

Билет 2

1. Палочка массы m одним концом упирается в угол между стеной и полом. В стене на высоте, равной длине палочки, просверлено гладкое отверстие, через которое проходит нить, привязанная к верхнему концу палочки. Другой конец нити перекинут через блок и на нем висит некоторый груз (рис. 4). Какова должна быть величина груза, чтобы палочка из любого начального положения всегда прижималась к стене?

2. Сосуд емкостью $V = 10$ литров откачивается насосом, имеющим производительность $a = 100$ *л/мин*. До какого наилучшего вакуума может быть откачан сосуд, если из-за имеющейся в нем течи давление в откаченном сосуде поднимается на $\Delta p = 1$ *мм рт. ст.* за время $t = 1$ *час* 40 *мин* (при остановленном насосе)? Температуру воздуха в сосуде считать неизменной.

Примечание. Производительность вакуумных насосов принято характеризовать объемом газа, который удаляется из откачиваемого сосуда в 1 *с*.

3. В схеме, изображенной на рисунке 5, положение движка «*А*» подобрано так, что ток $I_2 = 0$. Чему равен при этом ток I_1?

4. В дымовой завесе из непрозрачных частиц радиуса $r_1 = 5$ *мк* при содержании вещества $\gamma = 0,04$ *г* в кубометре воздуха дальность видимости составляет $l_1 = 50$ *м*. Сколько вещества в кубометре воздуха распыляется другим источником завесы, который создает частицы радиуса $r_2 = 10$ *мк*, если видимость сокращается до $l_2 = 20$ *м*?

Билет 3

1. Космонавты, высадившиеся на Луну, должны возвратиться на базовый космический корабль, который летает по круговой орбите на высоте, равной радиусу Луны $R_Л = 1740$ *км*. Какую начальную скорость

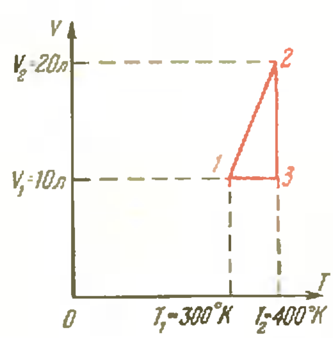


Рис. 1.

Рис. 2.

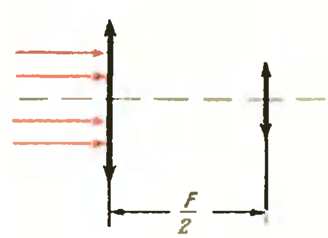


Рис. 3.

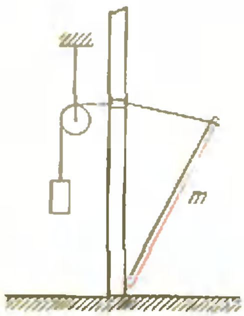


Рис. 4.

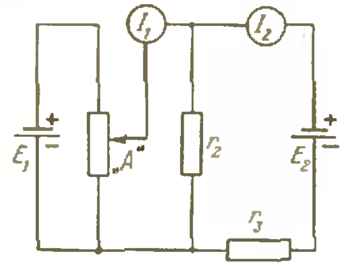


Рис. 5.

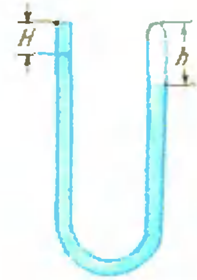


Рис. 6.

с на поверхности Луны необходимо сообщить лунной кабине, чтобы стыковка с базовым кораблем стала возможной без дополнительной коррекции величины скорости кабины? Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g = 1{,}7$ *м/с²*.

Примечание. Потенциальная энергия тела массы m, удаленного на расстояние r от центра планеты с массой M, определяется соотношением $W = -\gamma\frac{Mm}{r}$, где γ — гравитационная постоянная.

2. На рисунке 6 изображена одна из простейших конструкций термометра, «запоминающего» максимальную температуру, до которой нагревали прибор во время опыта. Длинная U-образная трубка, запаянная с одного конца, заполнена при температуре $T_0 = 273°$ К ртутью, как показано на рисунке. В правом колене над ртутью находится некоторое количество воздуха, высота столба которого $h = 24$ *см*. При нагревании прибора воздух, расширяясь, вытесняет часть ртути. После охлаждения до первоначальной температуры T_0 уровень ртути в левом открытом колене понизился на $H = 6$ *см*. Определить температуру, до которой нагревался прибор. Атмосферное давление $p_A = 760$ *мм рт. ст.* Давлением паров ртути и ее тепловым расширением пренебречь.

3. Элемент атомной батареи электрического тока представляет собой сферический конденсатор. На внутреннюю сферу нанесен радиоактивный препарат, испускающий α-частицы со скоростью $v_0 = 2{,}2 \cdot 10^6$ *м/с*. Определите э. д. с. этого элемента. Отношение заряда α-частицы к ее массе $q/M = 4{,}8 \cdot 10^7 \frac{к}{кг}$.

4. На дне сосуда, заполненного водой, лежит плоское зеркало. Человек, наклонившийся над сосудом, видит изображение своего глаза в зеркале на расстоянии наилучшего зрения $d = 25$ *см*, когда расстояние от глаза до поверхности воды составляет $h = 5$ *см*. Определить глубину сосуда. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

Билет 4

1. Штанга массы m и длиной l закреплена нижним концом на шарнире (рис. 7). К верхнему концу штанги привязана нить, перекинутая через блок, укрепленный на высоте H от шарнира и на одной с ним вертикали. Какой минимальный груз нужно подвесить на другой конец нити, чтобы штанга устойчиво стояла в вертикальном положении?

2. Водород, содержащийся в баллоне объемом $V = 100$ *л* под давлением $p = 100$ *атм*, используется для наполнения метеорологических шаров — зондов, имеющих мягкую оболочку. Каждый шар — зонд должен иметь подъемную силу $F = 2$ *кГ*. Сколько шаров можно наполнить водородом из одного баллона? Температура воздуха в баллоне и шарах равна температуре окру-

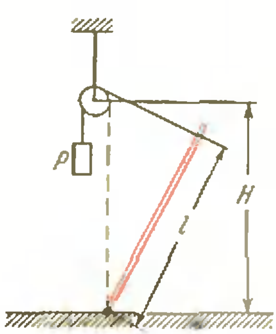


Рис. 7.

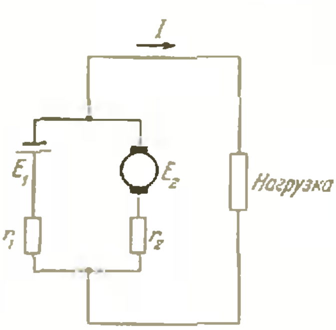


Рис. 8.

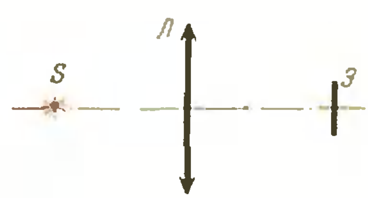


Рис. 9.

жающего воздуха $T=300°$ К. Молекулярный вес воздуха принять равным 29.

3. Источниками электрического тока в системах электрического оборудования современных автомобилей являются генератор постоянного тока и соединенный с ним параллельно аккумулятор (рис. 8). Э.д.с. аккумулятора $E_1=12$ *в*, э.д.с. генератора, $E_2=14$ *в*, а его внутреннее сопротивление $r_2=0{,}05$ *ом*. При каком токе I, потребляемом нагрузкой, аккумулятор начнет разряжаться?

4. На расстоянии l от небольшого экрана (рис. 9) находится точечный источник света S. Между источником и экраном поместили собирающую линзу $Л$ так, что источник расположен в фокусе линзы. Оказалось, что освещенность экрана не изменилась. Какая часть световой энергии теряется при прохождении линзы? Фокусное расстояние линзы $F=\frac{2}{3}l$.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1972 ГОДА

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Отделение общей геологии геологического факультета

1. Решить уравнение:

$$2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0.$$

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\log_4 x + \log_{1/4} y^3 = -1, \\ \log_4 x^4 - \log_{1/4} y = 5. \end{cases}$$

3. Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 50 *км*, навстречу друг другу одновременно вышли 2 пешехода. Через 5 часов встретились. После встречи скорость первого пешехода, идущего из A в B, уменьшилась на 1 *км/ч*, а скорость второго пешехода, идущего из B в A, возросла на 1 *км/ч*.

Известно, что первый пешеход прибыл в пункт B на 2 часа раньше, чем второй прибыл в пункт A. Определить первоначальную скорость первого пешехода.

4. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{13}{2-x} > x+4.$$

5. Дан треугольник ABC, в котором $AB=6$ *см*, $BC=7$ *см*, $AC=5$ *см*. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке d. Определить площадь треугольника AdC.

Отделение геофизики геологического факультета

1. Поезд метро состоит из нескольких вагонов, причем в каждом вагоне находится одинаковое число пассажиров. Количество пассажиров в одном вагоне превосходит число вагонов на 9. Когда на станции во 2-й вагон вошло 10 человек, а из остальных вышло по 10 человек, то число пассажиров во 2-м вагоне оказалось равным числу пассажиров, оставшихся во всех остальных вагонах. Сколько пассажиров было первоначально в каждом вагоне?

2. Решить уравнение:

$$3\,\mathrm{tg}^2 x + 7 = \frac{2}{\sin^2 x}.$$

3. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}} > \frac{1}{x+1}.$$

4. Трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM вписана в окружность, центр которой лежит на основании KN. Диагональ KM трапеции равна 4 *см*, а боковая сторона KL равна 3 *см*. Определить длину основания LM.

5. Три шара попарно касаются друг друга и некоторой плоскости. Точки касания шаров с плоскостью образуют прямоугольный треугольник с катетом, равным 3 *см*, и противолежащим углом 30°. Определить радиусы данных шаров.

НОВЫЕ КНИГИ

В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в 1972 году, представляющие интерес для наших читателей.

В III—IV кварталах 1972 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга — почтой»).

МАТЕМАТИКА

Издательство «МИР»

1. Эббинхауз Г., Якобс К., Ман Ф., Хермес Г., *Машины Тьюринга и рекурсивные функции*. (Объем 12 л., тираж 40 000 экз., цена 86 к.)

Эта коллективная монография немецких математиков содержит элементарное изложение теории машин Тьюринга и рекурсивных функций — важного раздела современной математической логики, нашедшего широкое применение в кибернетике. Помимо основ этой теории, книга содержит ряд существенных результатов, включая достижения последнего времени (в частности, результаты Колмогорова о связи машин Тьюринга с основаниями теории вероятностей). Изложение ведется строго, но доступно, содержит много примеров и пояснений.

Монографию с интересом прочтут читатели разных категорий, начиная от учащихся старших классов школ с математической специализацией и кончая научными работниками и преподавателями высшей школы.

2. Дэвис М. *Теория игр*. (Объем 12 л., тираж 75 000 экз., цена 60 к.)

Теория игр — одна из молодых и бурно развивающихся областей современной математики. Ее предмет — формальное изучение конфликтных ситуаций в самом широком смысле слова. Идеи и методы теории игр находят приложение в экономике, военном деле, биологии и других отраслях знания.

Книга М. Дэвиса представляет собой увлекательное популярное введение в теорию игр. Наиболее яркая особенность книги состоит в том, что автор, начиная с основных, первичных понятий теории игр, доводит читателя до весьма современных и тонких идей, неизменно выдерживая общедоступный стиль изложения, не требующий от читателя математической подготовки. В шести разделах книги рассмотрены соответственно игры одного лица, конечные антагонистические игры, теория полезности, игры двух лиц с ненулевой суммой и игры многих лиц.

Книга представляет интерес для самых широких кругов читателей, желающих познакомиться с основными идеями теории игр. Ее с удовольствием прочтут и математики.

3. Сойер У. *Путь в современную математику*. (Объем 11 л., тираж 50 000 экз., цена 55 к.).

Профессор У. Сойер известен советским читателям по книге «Прелюдия к математике» и статье «Алгебра» в сборнике «Математика в современном мире».

В книге «Путь в современную математику», обсуждая идеи реформы математического образования, автор делает попытки выделить новые вопросы современной математики для включения в школьную программу.

Рассматривая отдельные темы математики (отображения, матрицы, векторные пространства и др.), которые приобретают важное значение в научной и инженерной практике, автор показывает, как многие из этих идей и понятий естественно возникают и развиваются из тем традиционной математики.

Сойер адресует свою книгу молодежи, но она будет с интересом прочитана не только студентами и школьниками, но и преподавателями, особенно в связи с перестройкой школьных учебных программ.

Издательство «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

4. Зорин В. В. *Пособие по математике для поступающих в вузы*. (Объем 12 л., цена 59 к.)

Пособие разъясняет основные понятия элементарной математики. Все пояснения даются применительно к тем требованиям, которые предъявляются к поступающим в вузы.

Пособие предназначается для лиц, готовящихся к конкурсным экзаменам в вуз.

5. Соломоник В. С., Милов П. Н. *Сборник вопросов и задач по математике*. (Объем 15 л., тираж 50000 экз., цена 67 к.)

Книга составлена в соответствии с программой приемных экзаменов для поступающих в средние специальные учебные заведения после окончания восьми классов средней школы. Включены примеры и задачи по арифметике, алгебре и геометрии.

Почти все разделы начинаются с краткого теоретического материала. Имеются также вопросы, позволяющие уяснить, насколько основательно усвоена теория.

ФИЗИКА

Издательство «МИР»

6. Липсон Г. *Великие эксперименты в физике.* (Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 72 к.)

Книга известного английского физика Г. Липсона содержит описание экспериментов, которые знаменовали собой гигантские шаги в познании окружающего мира. В ней охвачены практически все важнейшие разделы физики — от простого механического движения до строения атома, а также те эксперименты, которые привели к пересмотру представлений классической физики.

Книга написана живо и эмоционально. Она рассчитана на самые широкие круги читателей — от школьников и студентов до научных работников.

7. Сегре Э. *Энрико Ферми — физик.* (Объем 18 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 50 к.)

Биография всемирно известного ученого, одного из основоположников ядерной физики и атомной энергетики Энрико Ферми, написана его учеником и ближайшим сотрудником Эмилио Сегре. Книга раскрывает образ Э. Ферми как ученого: в ней рассказывается о стиле его работы, о проблемах, которыми он занимался, о взаимоотношениях с сотрудниками и учениками. Высокий научный уровень книги сочетается с популярным изложением.

Книга интересна самым различным читателям — от специалистов — физиков до студентов и старших школьников.

8. Грегори Р. *Разумный глаз.* (Объем 11 л., тираж 50 000 экз., цена 55 к.)

Автор книги — профессор бионики в Эдинбургском университете, один из крупнейших в мире специалистов по психологии зрения.

Отвечая на вопрос: «каким образом мозг извлекает сведения о внешнем мире из некоторого узора пятен света на сетчатке глаза?» и многие другие, Грегори рассказывает о связи между важнейшими факторами восприятия.

Материал богато иллюстрирован рисунками, которые позволяют читателю проверить предлагаемые ему сведения.

Книга представляет интерес для любителей научно-популярной литературы.

9. Кемпфер Ф. *Основы современной физики.* (Объем 16 л., тираж 50 000 экз., цена 80 к.)

Преподавателям физики как средней, так и высшей школы с каждым годом становится все труднее «угнаться» за стремительным ростом своей науки. Единственно возможный выход состоит в перестройке структуры изложения физики, максимальном ее приближении к структуре современной науки.

Предлагаемая книга профессора Кемпфера, известного советским читателям по русскому переводу его фундаментальной монографии «Основные положения квантовой механики» («Мир», 1967), представляет собой удачную попытку решения этой нелегкой задачи. Пользуясь весьма скромным математическим аппаратом, автор оригинально систематизировал, критически осмыслил и изящно изложил основные представления, на которых строится физика.

Книга адресована очень широкому кругу читателей, в первую очередь студентам младших курсов и школьникам, для которых она вполне доступна.

Издательство «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

10. Гринбаум М. И. *Самодельные приборы по физике.* (Объем 10 л., тираж 40 000 экз., цена 35 к.)

В книге приведены описания различных приборов по физике, которые могут быть изготовлены в условиях школы. Даются рекомендации к применению этих приборов в практике школьного физического эксперимента.

11. Коган Б. Ю. *Задачи по физике.* (Объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 60 к.)

Сборник состоит из задач повышенной трудности, которые учитель может использовать на факультативных занятиях, при проведении олимпиад, в кружковой работе, а также рекомендовать учащимся при подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

Первая часть сборника содержит условия задач и основные теоретические сведения по курсу элементарной физики.

Во второй части приводятся решения всех задач, а в конце сборника — ответы ко всем задачам.

Издательство «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

12. Милковская Л. Б. *Повторим физику.* (Объем 27,5 л., тираж 200000 экз., цена 88 к).

Настоящее пособие предназначено для молодежи, готовящейся к поступлению в вузы самостоятельно или на заочных курсах. Его содержание соответствует программе по физике для поступающих в вузы. Оно отличается от пособий этого рода тем, что каждая его глава содержит систематическое изложение темы, вопросы для повторения, примеры решения задач и задачи для самостоятельных упражнений.

В пособие включены некоторые вопросы, связанные с современными достижениями физики.

13. Гольдфарб Н. И. *Сборник вопросов и задач по физике.* (Объем 18 л., тираж 75000 экз., цена 75 к.)

Предлагаемое пособие представляет собой систематический сборник вопросов и задач по физике по всем разделам программы вступительных экзаменов в вузы с повышенными требованиями по физике.

В него включены вопросы и задачи по физике, которые предлагались в различных вузах физического профиля.

М. Л. Смолянский

ИНФОРМАЦИЯ

VI Всесоюзная математическая олимпиада школьников

Л. Г. Лиманов

Весной во всех городах Союза прошли городские и районные олимпиады. Их победители и победители конкурса журнала «Квант»*) встретились на областных и республиканских олимпиадах.

12 апреля в Челябинске открылась 6-я Всесоюзная олимпиада школьников по математике. В ней приняли участие победители областных и республиканских олимпиад, а также школьники, получившие I и II премии 5-й Всесоюзной олимпиады (236 десятиклассников, 196 девятиклассников и 131 восьмиклассник).

Челябинск радушно встретил своих гостей. Успешному выполнению напряженной шестидневной программы олимпиады помогло то, что челябинцы очень тщательно подготовились к ее проведению.

Школьники разместились во втором и четвертом интернатах. 13 и 14 апреля в классах интернатов они решали задачи. Каждый день на решение отводилось около пяти часов. Вот задачи, которые были им предложены (большинство из них вы уже видели в «Задачнике «Кванта», см. «Квант» №№ 7, 8, 1972 г.).

Восьмой класс

Первый день

1. **М156** («Квант» № 8).
2. **М154** («Квант» № 7).
3. *Найти наибольшее целое число x такое, чтобы число $4^{27}+4^{1000}+4^{x}$ являлось полным квадратом.*

Второй день

4. **М151** («Квант» № 7).
5. *Семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ вписан в окружность. Доказать, что если центр этой окружности лежит внутри семиугольника, то сумма углов при вершинах A_1, A_3 и A_5 меньше $450°$.*
6. **М153** («Квант» № 7).

Девятый класс

Первый день

1. **М152** («Квант» № 7).
2. **М158** («Квант» № 8).
3. **М154** («Квант» № 7).
4. **М155** («Квант» № 7).

Второй день

5. *Пусть x, y — положительные числа, s — наименьшее из чисел x, $y+\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$. Найти наибольшее возможное значение s. При каких x и y оно достигается?*
6. *Точка O, лежащая внутри выпуклого многоугольника, образует с каждыми двумя его вершинами равнобедренный треугольник. Доказать, что эта точка равноудалена от вершин многоугольника.*
7. **М159** («Квант» № 8).

Десятый класс

Первый день

1. **М152** («Квант» № 7).
2. **М158**. («Квант» № 8).
3. *O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Доказать, что прямая, проходящая через точки пересечения медиан треугольников AOB и COD, перпендикулярна прямой, проходящей через точки пересечения высот треугольников BOC и AOD.*
4. **М155** («Квант» № 7).

Второй день

5. **М151** («Квант» № 7).
6. **М157** («Квант» № 8).
7. **М160** («Квант» № 8).

Разберем задачи, не вошедшие в «Задачник «Кванта»».

Восьмой класс

Задача 3. *Предположим, что $x\geq 27$. Тогда, поскольку 4^{27} является квадратом, нам нужно отыскать максимальное x_1, для которого выполняется равенство* $1+4^{973}+4^{x_1}=n^2$. Его можно записать так: $1+4^{973}=(n+2^{x_1})(n-2^{x_1})$. Отсюда, так как $n+2^{x_1}\leq 1+4^{973}$ и $n-2^{x_1}\geq 1$, следует, что $2\cdot 2^{x_1}\leq 4^{973}$ и $x_1\leq 1945$. Как легко видеть, это значение x_1 подходит: $1+4^{973}+4^{1945}=(1+2^{1945})^2$. Окончательно, $x=x_1+27=1972$. (Это и не удивительно, ведь олимпиада происходила именно в 1972 году).

*) Школьники, успешно решавшие задачи из «Задачника «Кванта» (см. «Квант» № 3, 1972 г.).

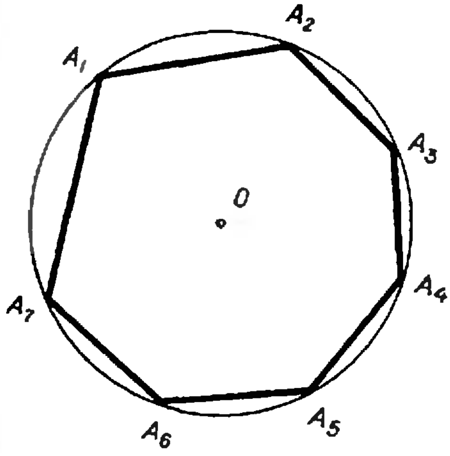


Рис. 1.

Задача 5. *Нам нужно доказать, что* $\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5<450^\circ$. Для вписанных углов A_1, A_3 и A_5 верны следующие равенства*)

$$\angle A_1=180^\circ-\frac{\smile A_2A_7}{2},$$

$$\angle A_3=180^\circ-\frac{\smile A_4A_2}{2},$$

$$\angle A_5=180^\circ-\frac{\smile A_6A_4}{2}\ \text{(см. рис. 1)}.$$

Поэтому

$$\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5=$$
$$=3\cdot 180^\circ-\frac{\smile A_6A_7}{2}=2\cdot 180^\circ+\frac{\smile A_7A_6}{2}.$$

Но дуга A_7A_6 не может быть больше полуокружности, поскольку в противном случае центр окружности O не лежал бы внутри нашего семиугольника. Следовательно,

$$\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5=360^\circ+$$
$$+\frac{\smile A_7A_6}{2}<360^\circ+90^\circ=450^\circ.$$

Девятый класс

Задача 5. Проще всего решать эту задачу с конца — сперва догадаться до ответа, а потом доказать, что он правильный. Угадать ответ можно с помощью таких соображений. Пусть при некоторых значениях $x=x_0$ и $y=y_0$ значение s максимально и равно s_0. Предположим, что числа x_0, $y_0+\frac{1}{x_0}$, $\frac{1}{y_0}$ не равны между собой. Пусть, например, $s_0<y_0+\frac{1}{x_0}$. Увеличим x_0 чуть-чуть так, чтобы для нового значения x, равного x'_0, сохранилось неравенство $s_0<y_0+\frac{1}{x'_0}$. После этого уменьшим чуть-чуть y — вновь так, чтобы для нового значения y, равного y'_0, сохранилось неравенство $s_0<y'_0+\frac{1}{x'_0}$. Мы пришли к таким значениям x'_0 и y'_0, что для них s больше s_0. Аналогично рассматриваются случаи $s_0<x_0$ и $s_0<\frac{1}{y_0}$. Поэтому $x_0=y_0+\frac{1}{x_0}=\frac{1}{y_0}=s_0$, откуда $x_0=\sqrt{2}$, $y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $s_0=\sqrt{2}$. Эти рассуждения не вполне строги, и дело тут не в словах «чуть-чуть», а в том, что мы предположили, что есть набор x_0, y_0, для которого s принимает максимальное значение. (Этот факт далеко не очевиден.) Однако, догадавшись до ответа $s_0=\sqrt{2}$, совсем просто довести решение до конца. Действительно, пусть для некоторого набора x_1, y_1, $s>\sqrt{2}$. Тогда $x_1>\sqrt{2}$, $\frac{1}{y_1}>\sqrt{2}$, откуда,

$$\frac{1}{x_1}+y_1<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{2},\ \text{то есть}$$

s для этого набора меньше $\sqrt{2}$. Полученное противоречие и показывает, что максимальное значение s равно $\sqrt{2}$ и что оно достигается только при $x=\sqrt{2}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 6. Проведем индукцию по числу вершин. Для треугольника (см. рис. 2) доказать утверждение задачи совсем просто. Действительно, сумма углов α, β и γ равна 360°, поэтому хотя бы два из этих углов — тупые. Но тупой угол не может прилегать к основанию в равнобедренном треугольнике. Поэтому $OA=OB=OC$. Многие школьники, решавшие задачу таким образом, после

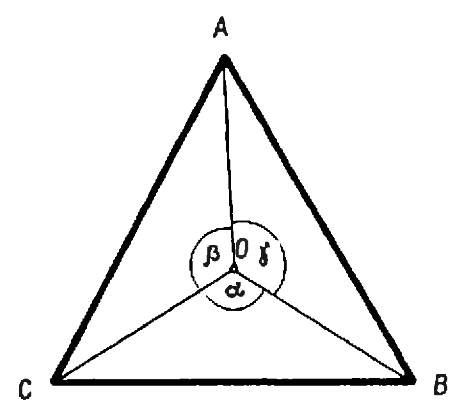
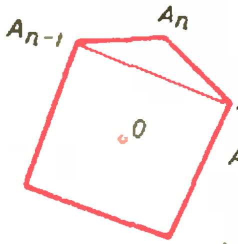


Рис. 2.

*) Отсчет дуг производится против часовой стрелки.



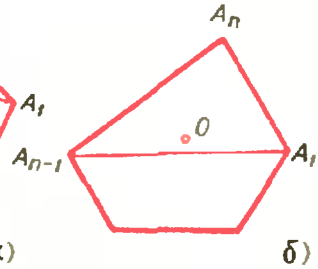
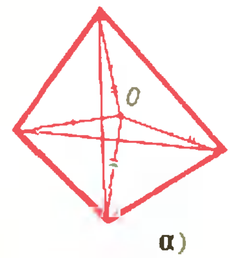


Рис. 3.



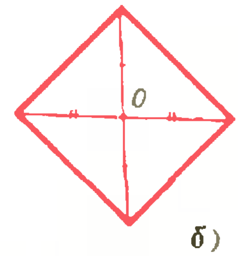


Рис. 4.

этого рассуждали так: проведем теперь диагональ $A_{n-1}A_1$ (см. рис. 3, *а*) и, воспользовавшись индуктивным предположением, будем считать, что отрезки $OA_1, OA_2, \ldots, OA_{n-1}$ равны между собой. Они упускали при этом случай, изображенный на рисунке 3, *б*. Довести доказательство до конца можно следующим образом. Для четырехугольника утверждение задачи верно (см. рис. 4, *а*, *б*). Пусть у многоугольника больше четырех сторон. Отыщем такой треугольник $A_k A_{k+1} A_{k+2}$, что точка O ему не принадлежит (рис. 5). Проведем теперь такую диагональ через вершину A_{k+1}, что точка O на ней не лежит*). Тогда из индуктивного предположения вытекает, что расстояние от точки O до любой из вершин равно длине отрезка OA_{k+2}.

Вот набросок другого решения (см. рис. 6). Докажем что отрезки OA_1 и OA_2 равны. (Если угол A_1OA_2 — тупой, то отрезки OA_1 и OA_2 равны. Поэтому будем считать этот угол острым.) Если в желтой зоне есть вершина, то поскольку углы A_1OA_l и A_2OA_l — тупые, отрезки OA_1 и OA_2 равны OA_l, откуда $OA_1 = OA_2$. Если же в желтой зоне вершин нет, то в синей и красной зонах есть по вершине. Отсюда следуют такие равенства $OA_1 = OA_m$, $OA_2 = OA_k$ и $OA_k = OA_m$ (поскольку угол A_1OA_2 — острый, угол A_kOA_m — тупой).

Десятый класс

Задача 3. Рассмотрим четырехугольник с вершинами в точках пересечения медиан треугольников AOB, BOC, COD и DOA. Ясно, что он подобен четырехугольнику с вершинами в серединах сторон четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 7, *а*). Опустим теперь перпендикуляры из вершин A, B, C и D на диагонали (рис. 7, *б*). Нам нужно доказать, что $K_1M_1 \perp K'M'$ (см. рис. 7, *в*). Поскольку $KM \parallel K_1M_1$, мы будем доказывать, что $KM \perp K'M'$. Четырехугольники $KLMN$ и $K'L'M'N'$ — параллелограммы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому достаточно доказать, что они подобны — из этого будет следовать, что их диагонали тоже перпендикулярны, так как тогда один будет получаться из другого поворотом на 90° и растяжением. Очевидно, что углы, отмеченные красной дужкой, равны между собой. Обозначим их величину через α, а длины диагоналей через l и m. Тогда, как легко видеть, $KL = \frac{l}{2}$, $LM = \frac{m}{2}$, $K'L' = l\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $L'M' = m\,\mathrm{tg}\,\alpha$, что и доказывает подобие четырехугольников $KLMN$ и $K'L'M'N'$.

14 апреля, 14^{30}, работы сданы. 15 апреля, пока члены жюри проверяют их, школьники свободны. Всего один день, а для 560 человек это и прослушанные лекции, и аллея Дружбы, посаженная школьниками, и знакомство с городом, и много интересных встреч и бесед.

16 апреля был особенно напряженный день и для участников, и для жюри. С 10 часов начался индивидуальный разбор работ. Во время индивидуального разбора участникам выдают карточки с результатами. Если школьник не согласен с полученными оценками, он разбирает свою работу с членом жюри. Хотя как правило, оценки не меняются и участник соглашается с тем, что они поставлены справедливо, бывают случаи, когда оценки повышаются. Однако индивидуальный разбор полезен не только для тех, чьи оценки улучшились, он помогает ребятам понять, что является решением задачи, что такое строгие рассуждения, как оформлять решения задач логически. Индивидуальный разбор закончился только в пять вечера, а с 11 до 15 для освободившихся участников читали лекции В. А. Алексеев, Н. Н. Константинов, Ж. Н. Раббот и другие члены жюри. В 17^{30} началась встреча с членами редколлегии журнала «Квант», входящими в состав жюри. Нам приятно отметить, что на эту встречу пришло большинство участников олимпиады и руководителей команд и что почти все пришедшие оказались подписчиками нашего журнала. На 17^{00} было назначено заседание жюри по подведению итогов олимпиады. Вовремя оно, конечно, не началось. Только после того, как председатель

*) Разумеется, если сразу отбросить вырожденные равнобедренные треугольники (треугольники с углом 180°), то есть понимать условие задачи так, что точка O не лежит ни на одной из диагоналей, то рассуждение можно упростить. Жюри не считало такое толкование условия ошибкой.

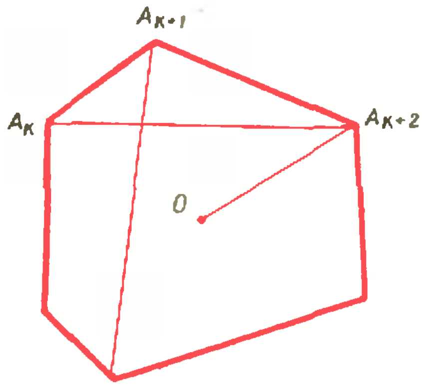


Рис. 5.

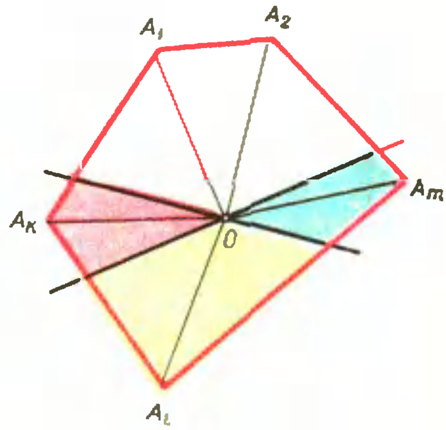


Рис. 6.

жюри, доктор физико-математических наук В. М. Алексеев «силой» прервал встречу с «Квантом» — это произошло около семи часов, — жюри начало работу.

И, наконец, 17 апреля — последний день олимпиады.

С 11 до 14 часов между командами ленинградского и московского интернатов был проведен математический бой (правила математического боя и предлагавшиеся на нем задачи смотрите в заметке на стр. 71). Москвичи победили с небольшим перевесом.

В 16 часов в Оперном театре состоялось закрытие олимпиады. Председатель жюри В. М. Алексеев вручает грамоты и премии победителям. Всего успешно прошли олимпиаду 238 участников.

Первые премии

получили восьмиклассники: *Сергей Фомин* (г. Ленинград, ФМШ), *Михаил Баум* (г. Симферополь, шк. № 40), *Михаил Гусаров* (г. Ленинград, шк. № 188), *Евгений Фалькин* (г. Чита, шк. № 38), *Виктор Козырев* (г. Ленинград, ФМШ), *Андрей Браилов* (г. Москва, шк. № 2), *Александр Мерков* (г. Москва, шк. № 91),; девятиклассники: *Сергей Конягин* (г. Саратов, шк. № 19), *Дмитрий Лещинер* (г. Москва, шк. № 2). и десятиклассники: *Сергей Белкин* (г. Москва, шк. № 7), *Владимир Бурков* (г. Москва, ФМШ), *Александр Шаповалов* (г. Москва, ФМШ), *Владимир Шварц* (г. Ленинград, ФМШ).

Вторые премии

— восьмиклассники: *Игорь Савицкий* (г. Ленинград, ФМШ), *Владимир Перцель* (г. Свердловск, шк. № 70), *Константин Морозов* (г. Фрунзе, шк. № 61), *Леонид Данилов* (г. Ижевск, шк. № 30), *Ольга Губа* (г. Вологда, шк. № 8), *Георгий Герасимов* (г. Саратов, шк. № 19), *Дмитрий Тюкавкин* (г. Иркутск, шк. № 11), *Леонид Трахтенберг* (г. Иваново, шк. № 55), *Евгений Шустин* (г. Борзя Читинской обл., шк. № 240), *Светлана Рубинштейн* (г. Москва, шк. № 2), *Николай Щербина* (г. Днепропетровск, шк. № 67); девятиклассники: *Аркадий Вайнтроб* (г. Москва, ФМШ), *Наум Гольцман* (г. Москва, шк. № 179), *Павел Грозман* (г. Симферополь, шк. № 40), *Сергей Захаров* (г. Магнитогорск, шк. № 4), *Владимир Макеев* (г. Ленинград, ФМШ), *Елена Чеховая* (г. Киев, шк. № 38) и десятиклассники: *Андрей Гольберг* (г. Москва, шк. № 2), *Юрий Колмаков* (г. Москва, ФМШ), *Владимир Кореняко* (г. Воронеж, шк. № 58),

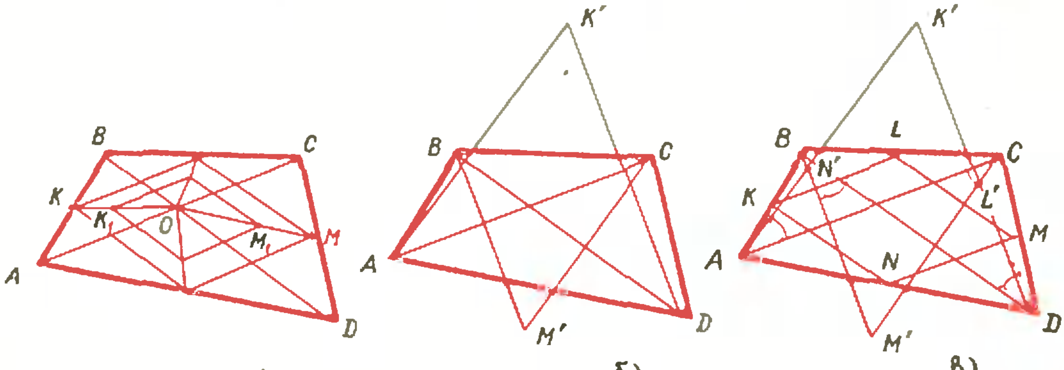


Рис. 7.

Школьники спят, а жюри работает.

Сергей Ландо (г. Пермь, шк. № 9), *Николай Макаров* (г. Ленинград, шк. № 239), *Александр Меркурьев* (г. Ленинград, ФМШ), *Александр Ронкин* (г. Харьков, шк. № 27), *Алексей Степанов* (г. Ленинград, ФМШ), *Ованнес Худавердян* (г. Ереван, ФМШ), *Аркадий Черняк* (г. Минск, шк. № 50).

Третьи премии

— в о с ь м и к л а с с н и к и: *Сергей Кузнецов* (г. Чебоксары, шк. № 16), *Виктор Паньков* (г. Минск, шк. № 93), *Сергей Карташов* (г. Скопнно Рязанской обл., шк. № 1),

Последнее заседание жюри.

Игорь Старобинец (г. Горький, шк. № 82), *Калле Кульбок* (ЭССР, Ныоская С. Ш.), *Эдуард Гольднер* (г. Кишенев, шк. № 37), *Александр Сергеев* (г. Ленинград, ФМШ), *Сергей Шульга* (г. Киев, ФМШ), *Сергей Пономаренко* (г. Чертков, Тернопольской обл., шк. № 1); д е в я т и к л а с с н и к и: *Александр Асташов* (г. Львов, шк. № 5), *Алексей Герусов* (г. Вольногорск Днепропетровской обл. шк. № 3), *Виктор Будаев* (г. Смоленск, шк. № 7), *Петр Карликов* (г. Киев, шк. № 38), *Артур Лалаян* (г. Красноводск, Туркменской ССР, шк. № 12), *Леонид Островецкий* (школа с. Державовка Носовского района Черниговской обл.), *Аркадий Питман* (г. Одесса, шк. № 116), *Криста Поолакене* (Ныоская школа г. Тарту Эстонской ССР), *Леонид Пугач* (г. Днепропетровск, шк. № 80), *Оганес Саркисян* (г. Ереван, шк. № 1), *Андрей Серебрянников* (г. Тюмень, шк. № 8), *Александр Талалай* (г. Москва, шк. № 91), *Александр Тюлягин* (г. Кировоград, шк. № 34), *Сергей Федоришин* (г. Симферополь, шк. № 40), *Автандил Цицуашвили* (г. Тбилиси, ФМШ), *Александр Шерстюк* (г. Николаев, шк. № 2), *Семен Элимелах* (г. Брянск, шк. № 5), *Игорь Шнайдман* (г. Херсон, шк. № 20) и д е с я т и к л а с с н и к и: *Евгений Гундарь* (г. Ворошиловград, шк. № 17), *Николай Ефимов* (г. Смоленск, шк. № 26), *Юрий Зуйков* (г. Донецк, шк. № 17), *Михаил Илларионов* (г. Воронеж, шк. № 58), *Виктор Кобельский* (г. Севастополь, шк. № 33), *Андрей Коган* (г. Москва, ФМШ), *Сергей Куксин* (г. Харьков, шк. № 7), *Юрий Медведев* (г. Ангарск, Иркутской обл., шк. № 10), *Александр Михайлов* (г. Стучка, ср. школа), *Михаил Перпер* (г. Кишинев Молдавской ССР, шк. № 34), *Сергей Стеценко* (г. Запорожье, шк. № 28), *Ефим Шварцман* (г. Москва, ФМШ).

Отзывы первой степени получили 20 восьмиклассников, 15 девятиклассников и 32 десятиклассника. Отзывы второй степени получили 30 восьмиклассников, 27 девятиклассников, 35 десятиклассников.

Кроме этого, участники получили 16 специальных премий. Одна из них — премия от журнала «Квант» — была вручена восьмикласснику *Евгению Фалькину*.

Олимпиада закрыта. До встречи в будущем году.

VI Всесоюзная физическая олимпиада школьников

Т. С. Петрова

VI Всесоюзная физическая олимпиада школьников проходила в этом году в Тбилиси. В ней приняли участие 561 ученик из восьмых, девятых и десятых классов разных городов СССР. Участники VI Всесоюзной олимпиады — это победители республиканских и областных олимпиад 1972 года, победители V Всесоюзной олимпиады, проходившей в 1971 году в Новосибирске; среди участников олимпиады были и победители конкурса, проводившегося журналом «Квант» *).

12 апреля в зале заседаний Верховного совета Грузинской ССР состоялось торжественное открытие VI Всесоюзной физической олимпиады. Больших успехов ее участникам пожелал председатель жюри олимпиады академик Академии наук Грузинской ССР Э. Л. Андроникашвили.

13 апреля проходил первый тур олимпиады — теоретический. Восьмиклассникам было предложено 4 задачи, девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач. На решение задач всем участникам отводилось 5 часов. Задачи теоретического тура олимпиады были опубликованы в разделе «Задачник «Кванта» нашего журнала (№№ 7, 8 за 1972 год).

14 апреля у участников олимпиады был день отдыха. Они осмотрели город, побывали в старинных крепостях в окрестностях Тбилиси, совершили экскурсию по Военно-Грузинской дороге.

В этот день жюри олимпиады проверяло работы участников. 156 участников, успешнее других справившиеся с задачами теоретического тура, получили право участвовать во втором туре олимпиады — экспериментальном. Среди них было 54 десятиклассника, 53 девятиклассника и 49 восьмиклассников. Точнее, восьмиклассников было 48, так как за восьмой класс в команде Московской области выступал семиклассник Сергей Коршунов, допущенный к участию в экспериментальном туре.

15 апреля все «олимпийцы» принимали участие во Всесоюзном коммунистическом субботнике.

16 апреля состоялся экспериментальный тур олимпиады. Каждый участник этого тура должен был по существу провести небольшое самостоятельное исследование, подтверждающее физические законы, позволяющее определить физические свойства вещества, устанавливающее связь между этими свойствами.

Среди экспериментальных задач, предложенных восьмиклассникам, была задача на определение ускорения свободного падения, задача на построение графика зависимости силы упругости от удлинения резинового жгутика (с этой задачей блестяще справился Сергей Коршунов, о котором мы уже говорили; его экспериментальная работа была признана лучшей по восьмым классам). Девятиклассникам были предложены задачи на определение плотности жидкости и на определение зависимости силы сопротивления жидкой среды от размеров движущихся в ней тел.

Десятиклассники решали задачи на определение диэлектрической проницаемости, на определение эффективного значения силы переменного тока и на измерение магнитного поля проводника с током.

Кроме выполнения самого эксперимента, от участника экспериментального тура требовалось умение правильно оформить отчет о выполненной работе, оценить погрешности эксперимента, точность полученных результатов. Все это учитывалось при оценке задачи экспериментального тура.

17 апреля на торжественном закрытии VI Всесоюзной физической олимпиады были объявлены имена победителей.

Дипломы I степени

получили следующие участники олимпиады: по 8 классам — *Сергей Коршунов* (ученик 7-го класса школы № 1 г. Монино Московской обл.), *Дмитрий Топтыгин* (Москва, школа № 2); по 9 классам: *Андрей Ушаков* (Ленинград, школа № 30); по 10 классам: *Сергей Лягушин* (Днепропетровск, школа № 23).

Дипломы II степени

получили следующие участники олимпиады: по 8 классам — *Анатолий Курганов* (Житомир, школа № 21), *Сергей Мачерет* (Киев, школа № 145); по девятым классам — *Юрий Лурье* (Грозный, школа № 1), *Александр Теохаров* (Алма-Ата,

*) Познакомиться с условиями конкурса нашего журнала вы можете в первом номере «Кванта» за 1972 год. Победители этого конкурса допускаются на областные олимпиады.

школа № 4), *Олег Теряев* (Днепропетровск, школа № 23), *Владимир Щебетков* (Смоленск, школа № 7); по 10 классам — *Владимир Белов* (Вологда, школа № 8), *Лев Вайдман* (Ленинград, школа № 45), *Сергей Кацур* (Кишинев, школа № 34), *Сергей Подковырин* (Майкоп, школа № 19), *Игорь Плетнев* (Москва, школа № 18), *Игорь Теплов* (Коммунарск, школа № 22).

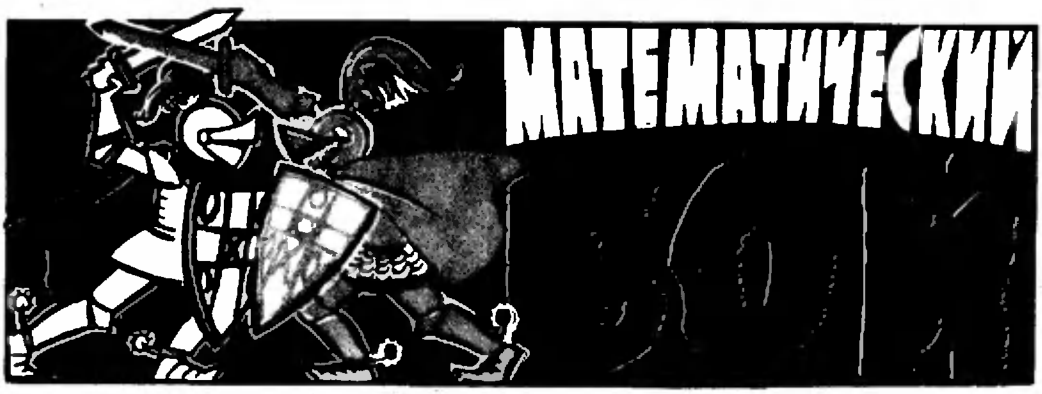
Дипломы III степени

были присуждены восьмиклассникам — *Анатолию Арзамасцеву* (Чита, школа № 4), *Серику Буркитбаеву* (Джамбул, школа № 8), *Владимиру Брауну* (Ленинград, школа № 45), *Виктору Игнатьеву* (Могилев, школа № 4), *Андрею Кирилюку* (Полтава, школа № 6), *Александру Кузнецову* (Саратов, школа № 13), *Тыну Луману* (Таллин, школа № 1), *Ашоту Мавсмяну* (физико-математическая школа г. Еревана), *Виктору Никифорову* (Чебоксары, школа № 2), *Виталию Скворцову* (Ленинград, школа № 121), *Игорю Ткачеву* (Хмельницкий, школа № 9), *Александру Фикселю* (Владивосток, школа № 23); девятиклассникам — *Геннадию Гилю* (Ровенская школа), *Владимиру Каганеру* (Москва, школа № 2), *Игорю Корепанову* (Днепропетровск, школа № 23), *Вадиму Мирному* (Москва, школа № 2), *Андрею Медведеву* (Свердловск, школа № 68), *Михаилу Осипову* (Москва, школа № 2), *Александру Скрипченко* (Николаев, школа № 35), *Александру Турчину* (Киев, школа № 145), *Юрию Яконенко* (г. Сокаль Львовской области, школа № 2); десятиклассникам — *Сергею Андрееву* (Хмельницкий, школа № 16), *Константину Агладзе* (Тбилиси, школа № 42), *Павлу Кузнецову* (Горький, школа № 40), *Вадиму Ваховскому* (Сахалинская область, Долинский крайОНО, пос. Сокол, школа № 4), *Вячеславу Дремову* (г. Горловка Донецкой области, школа № 73), *Леониду Дзагурову* (Таллин, школа № 15), *Михаилу Дежурко* (г. Пинск Брестской области, школа № 3), *Игорю Ицкевичу* (Харьков, школа № 27), *Александру Зуеву* (г. Перевальск, школа № 1), *Сергею Заславскому* (Днепропетровск, школа № 23), *Борису Кузьмину* (Москва, школа № 18), *Григорию Кантору* (Киров, школа № 53), *Виктору Лахину* (Ворошиловград, школа № 17), *Рубену Мкртчяну* (Ереван школа № 1), *Яану Пруумланну* (г. Вяльянди Эстонской ССР, школа № 1), *Евгению Склянину* (Ленинград, школа № 30), *Сергею Соболеву* (Кострома, школа № 32), *Владимиру Оганнесяну* (Армянская ССР, Абоаянский р-н, с. Вохчаберд), *Александру Черняку* (Воронеж, школа № 58).

27 восьмиклассников, 34 девятиклассника и 24 десятиклассника получили грамоты за успешное выступление на олимпиаде.

Кроме дипломов и грамот, многим участникам были присуждены специальные призы от различных организаций. В частности, приз Кировского районного отдела народного образования г. Тбилиси за лучшие результаты среди участниц олимпиады получила ученица 8 класса школы № 24 г. Семипалатинска *Татьяна Забродская*. Специальный приз журнала «Пионер» был вручен самому юному участнику олимпиады *Сергею Коршунову*. *Александру Фикселю*, ученику 8 класса школы № 23 г. Владивостока, за оригинальное решение задач теоретического тура был вручен специальный приз журнала «Квант» — комплекты журнала за 1970 и 1971 годы с подписями главного редактора журнала академика И. К. Кикоина и первого заместителя главного редактора академика А. Н. Колмогорова.

Оргкомитет олимпиады, жюри, ученые Тбилисского Государственного университета, Тбилисского Политехнического института и Педагогического института, где подготавливались задачи экспериментального тура, работники Тбилисского отдела народного образования приложили много сил, чтобы олимпиада прошла четко, организовано, с большой пользой для ее участников.



Математический бой

В. П. Федотов

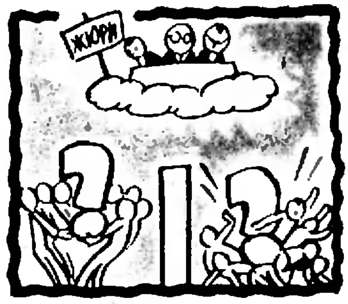
В «Кванте» № 5 в информации о слете учащихся физико-математических школ мы упоминали о том, что на слете проводился математический бой — соревнование, ставшее популярным в физико-математических школах. В этом номере мы публикуем правила математического боя и задачи математического боя, состоявшегося на 6-ой Всесоюзной математической олимпиаде в Челябинске.

В математическом бое участвуют 2 или 3 команды, состоящие из 8—12 членов каждая, один из них является капитаном. Подготовку боя и судейство ведет жюри, которое заранее отбирает задачи и (обычно столько же, сколько членов в команде) и утверждает правила и регламент боя, а во время боя присуждает командам очки. Наиболее интересно проходит бой трех команд, поэтому мы изложим правила математического боя для трех команд, а затем расскажем об особенностях боя двух команд.

Подготовительная часть

Первые 2—5 часов команды находятся в различных помещениях и решают задачи. При этом ни одна из команд не должна получать информацию о том, какие задачи решены противниками.

На этом этапе команда выступает как единое целое: все ее члены вместе решают задачи, и если задача решена кем-либо из них, то остальным решать ее уже не надо. Распределением задач руководит капитан. Однако в дальнейшем по каждой задаче команду будет представлять один человек, поэтому капитан должен распределить решенные задачи между членами команды (при этом один человек может выступать по нескольким задачам). Кроме того, нужны «специалисты» по нерешенным задачам, знакомые со всеми трудностями и тонкостями задачи и способные опровергнуть неправильное решение противника.



Бой

Когда кончается время на подготовку, команды собираются вместе в зале и начинается бой, который состоит из туров (по каждой задаче). Прежде всего жюри с помощью легких дополнительных вопросов, конкурса капитанов или жеребьевкой присваивает командам номера A, B, C (в дальнейшем роли команд меняются в соответствии с заранее составленным расписанием, если ни одна из команд не отказывается от вызова).

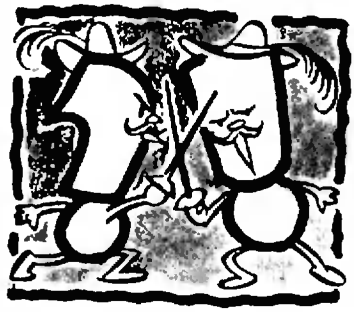
После этого жюри предоставляет право команде A вызвать команду B на любую задачу, которая решена командой A и еще не рассказывалась. Если команда A не имеет таких задач, то она может отказаться от вызова, но при этом она лишится права выступать до конца боя. Поэтому иногда команда сознательно делает вызов на нерешенную задачу. Если это в дальнейшем обнаруживается, то классифицируется как «некорректный вызов» и соответствующим образом карается.

Далее возможны 9 вариантов, собранные в таблицу 1.

Команда B может принять вызов, либо может отказаться рассказывать решение. В случае отказа проверяется корректность вызова: решение обязана рассказать команда A. Если команда знает решение, но не может четко рассказать его или подозревает, что в решении есть ошибки, часто бывает выгоднее отказаться отвечать. Одна из команд A или B назначает отвечающего решение, другая—оппонента. Команда C сразу же назначает

9 вариантов распределения ролей 3 команд в туре

A	B	A	C	B	отв.	опп.	рец.	штраф
вызов B	принят	—	—	—	B	A	C	—
вызов B	отказ	принят	—	—	$A(?)$	B	C	?
вызов B	отказ	отказ (некорр. вызов)	принят	—	C	B	A	A
вызов B	отказ	отказ (некорр. вызов)	отказ	—	—	—	—	A
отказ	вызов C	—	принят	—	C	B	A	—
отказ	вызов C	—	отказ	принят	$B(?)$	C	A	?
отказ	вызов C	—	отказ	отказ (некорр. вызов)	—	—	—	B
отказ	отказ	—	принят	—	C	B	A	—
отказ	отказ	—	отказ	—	—	—	—	—




рецензента. Если вызов некорректен и команда A сразу же отказалась рассказывать решение, то отвечает C, оппонирует B, а рецензирует A.

При ответе жюри предоставляет слово отвечающему и дает право оппоненту в любом месте прервать отвечающего, чтобы задать ему вопрос или попросить его повторить неясное место. Ни рецензент, ни жюри, ни остальные члены команд (а тем более болельщики) не имеют права вмешиваться в диалог отвечающего и оппонента или задавать вопросы. Только в случае, если дискуссия между отвечающим и оппонентом затянется и уйдет в сторону, жюри имеет право прервать ее и передать слово рецензенту. Рецензент обычно не задает вопросов отвечающему и оппоненту, а лишь комментирует ход решения и оппонирование. Только после окончания выступления рецензента члены жюри получают право задавать вопросы отвечающему.

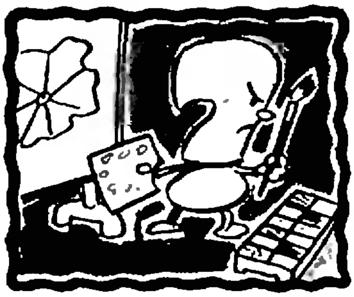
Каждая задача независимо от ее трудности оценивается в 12 очков, которые распределяются между отвечающим, оппонентом и рецензентом в зависимости от содержания их выступлений. Если был обнаружен некорректный вызов, то из этих же 12 очков выделяются штрафные очки. За некорректный вызов команды A каждая из команд B и C получает от 2 до 6 очков. Такой способ наказания команды A пришлось ввести после того, как несколько боев закончились с отрицательным счетом.

Очень часто все 12 очков получает одна команда: либо команда B рассказывает несложную задачу, так что A и C нечего добавить, либо A вызывает B на заведомо сложную задачу, B отказывается, а затем ни B, ни C не могут сказать ничего существенного по поводу решения, комментировать которое они еще не подготовлены.

Массу неприятностей жюри доставляет проблема некорректных вызовов. Команда A, вынужденная отвечать в случае отказа B, может рассказывать либо заведомо неверное, но «правдоподобное» решение, либо неполное, частичное или незаконченное решение. Так как бывает трудно отличить хорошо замаскированную сознательную ошибку в решении от «настоящей», то принято считать некорректным любой вызов, при котором у команды A будет обнаружена существенная ошибка в решении или вообще отсутствие решения. Величина штрафа зависит от того, кем была замечена ошибка: самим отвечающим, оппонентом, рецензентом или жюри. Решение считается верным, если никому из членов жюри не удастся обнаружить ошибку в нем до того, как будет объявлен счет по этой задаче; если ошибка будет найдена после объявления счета, то счет все равно останется прежним. Однако, если жюри сомневается в решении, но не может сразу указать ошибку, то счет не объявляется до тех пор, пока специально выделенный для этого член жюри не убедится в наличии или отсутствии ошибки.

* * *

Если в бою участвуют только две команды, то правила значительно упрощаются — нет рецензирования и не нужно заботиться о расписании вызовов. Здесь команда, вызвавшая некорректно, наказывается еще и тем,



что она обязана повторить вызов. Кроме того, жюри имеет право часть очков не распределять между командами вообще.

Расписание ролей команд надо составлять так, чтобы каждая команда могла вызвать каждую другую. Если бой ведется по 6 (или 12) задачам, то в 6 турах как раз получаются все перестановки 3 команд ($3!=6$): ABC, BCA, CAB, ACB, CBA, BAC.

Задачи математического боя в Челябинске на Всесоюзной математической олимпиаде *)

1. *Дана последовательность* $\{a_n\}$ *и функция* f *такая, что* $f(n+1)-f(n)\geqslant n+1$. *Известно, что* $a_n\leqslant a_{n+1}+a_{f(n)}$. *Докажите, что можно указать такие члены* $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, *что* $a_{i_1}+a_{i_2}+\ldots+a_{i_k}>100$.

2. *В сыре, имеющем форму куба* $n\times n\times n$, *вырезана сферическая дырка диаметра* 1. *Найти минимальное число плоских разрезов, позволяющих наверняка ее обнаружить.*

3. *Каждая страна на плоскости состоит из одного или двух кусков. Докажите, что карту можно правильно раскрасить* 12 *цветами.*

4. *В треугольнике* ABC *построены внутренним образом равнобедренные треугольники* ABC', BCA', ACB'. *Доказать, что прямые* CC_1, BB_1 *и* AA_1, *перпендикулярные* $A'B'$, $A'C'$ *и* $B'C'$ *соответственно, пересекаются в одной точке.*

5. *Для всякого* n *можно указать такое* m, *что из* m *человек можно выбрать* n *попарно знакомых или* n *попарно незнакомых.*

6. *Даны числа* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, *причем* $a_0=a_n=0$, $a_i>0$ *при* $i\neq 0$, n *и* $\frac{a_{s-1}+a_{s+1}}{2}\geqslant a_s\cos\frac{\pi}{k}$. *Доказать, что* $n\geqslant k$.

7. *Дана функция* f *на отрезке* $[ab]$, *причем*

$$f+f''>0,\quad f(a)=f(b)=0,$$
$$f(x)>0 \text{ на } (ab).$$

Доказать, что $b-a\geqslant\pi$ *).

8. *Пусть* a *и* n — *натуральные числа, большие* 1. *Доказать, что*

$$a^n-a\neq\sum_d\frac{a^n-1}{a^d-1},$$

где суммирование ведется по некоторым делителям d *числа* n.

*) Эту часть статьи подготовил к печати председатель жюри математического боя Л. Г. Лиманов.

*) f'' — вторая производная функции f. Считается, что она существует во всех точках отрезка $[a, b]$.

В «Кванте» № 6 следующие опечатки:

стр.			напечатано	должно быть
75	правая колонка	14 строка снизу	$5a\pm\sqrt{a^2+4a}$	$5a-\sqrt{a^2+4a}$
77	левая колонка	8 строка снизу	$20\sqrt{21}$, $20\sqrt{21}$	$10\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$
77	правая колонка	7 строка сверху	S	$2S$

Ленинские премии 1972 года

Из четырнадцати Ленинских премий в области науки и техники, присужденных в 1972 году, три относятся к области физики и одна — к области математики. Это является бесспорным свидетельством успешного развития физико-математических наук в нашей стране. Любопытно отметить, что две Ленинских премии присуждены за исследования, выполненные в одном и том же научном центре — Ленинградском физико-техническом институте имени А. Ф. Иоффе.

Коллектив научных работников, возглавляемый доктором физико-математических наук Жоресом Ивановичем Алферовым (В. М. Андреев, Д. З. Гарбузов, В. И. Корольков, Д. Н. Третьяков и В. И. Швейкин) удостоен Ленинской премии *«за фундаментальные исследования гетеропереходов в полупроводниках и создание новых приборов на их основе»*.

Широкое использование полупроводников в области радиоэлектроники оказалось возможным благодаря тому, что физики научились создавать в одном и том же полупроводниковом материале два разных типа носителей электрического тока — электроны и дырки *). Объединив два кусочка одного и того же полупроводникового вещества с различными носителями тока, мы получаем так называемый p — n-переход, являющийся основой большинства полупроводниковых приборов.

Физики давно уже предсказывали, что если бы удалось осуществить p — n-переход между различными по химической природе полупроводниковыми материалами (в таком случае его называют гетеропереходом), то при этом открылись бы совершенно новые возможности для полупроводниковой радиоэлектроники. Попытки осуществления гетеропереходов неоднократно предпринимались во многих крупных научных центрах и промышленных лабораториях США, Японии, Англии и других стран. Однако там не удалось преодолеть огромных трудностей, связанных с необходимостью образования достаточно совершенной границы раздела между двумя разнородными кристаллическими структурами. Ведь на этой границе должны выполняться многие очень жесткие условия совместимости (механические, кристалло-химические, тепловые и другие), иначе электроны и дырки не будут переходить из одного материала в другой.

Впервые эти трудности были успешно преодолены коллективом сотрудников ФТИ им. А. Ф. Иоффе во главе с Ж. И. Алферовым. Им удалось осуществить несколько разных типов гетеропереходов и разработать многослойные элементы для разнообразных полупроводниковых устройств.

Появилась возможность создания новых типов полупроводниковых приборов, в частности, таких, которые образуют техническую базу новой области физики, получившей название оптической электроники.

Работы ученых ФТИ получили широкое международное признание. В 1971 году Франклиновский Институт (США) присудил Ж. И. Алферову медаль Стюарта Баллантайна, являющуюся одной из высших международных наград за работы в области прикладной физики.

Вторая Ленинская премия присуждена группе сотрудников Ленинградского физико-технического института имени А. Ф. Иоффе (В. В. Афросимов, В. М. Дукельский, Н. В. Федоренко) и Института атомной энергии имени И. В. Курчатова (О. Б. Фирсов, В. А. Беляев) за цикл работ *«Элементарные процессы и неупругое рассеяние при атомных столкновениях»*.

При обычных температурах и давлениях атомы и молекулы газа сталкиваются подобно биллиардным шарам, не изменяя своей структуры. Такие столкновения принято называть упругими. Если же энергию сталкивающихся частиц существенно увеличить, то резко изменится и характер столкновений. Часть кинетической энергии взаимодействующих частиц пойдет на возбуждение их электронных оболочек, а если энергия велика,

---

*) Подробно об этом рассказано в статье М. А. Федорова «Полупроводниковые диоды и триоды», опубликованной в журнале «Квант» № 6 за 1971 год.

то на отрыв электронов от атомов. Такие столкновения молекул и атомов называют неупругими. Неупругие столкновения могут быть весьма разнообразными по своему характеру. Чтобы изучить происходящие при этом процессы, надо иметь возможность исследовать элементарные акты соударений отдельных частиц. Однако до недавних пор физикам удавалось следить лишь за конечными результатами многочисленных соударений большого числа взаимодействующих частиц.

Два десятилетия назад группа ленинградских физиков приступила к решению этой чрезвычайно сложной проблемы. Прежде всего они разработали экспериментальные методы, которые позволяют следить за состоянием отдельных частиц в процессе неупругих соударений. Эти методы дают возможность измерять энергии, массы, заряды взаимодействующих частиц и следить за направлениями их движения.

При помощи этих методов были произведены многолетние систематические исследования, которые необычайно расширили и углубили наши представления о неупругом взаимодействии атомов и молекул. Оказалось, что прежняя теория таких процессов неверна. Потребовалась новая теория. Ее разработали участники этих исследований. В проведенных экспериментах была открыта многоэлектронная ионизация, при которой атом в одном столкновении теряет сразу несколько электронов. Выяснилось, что потери энергии взаимодействующих частиц при столкновениях имеют дискретный характер. Энергия, передаваемая при соударении, может приобретать не любые значения в допустимом интервале, а лишь некоторые строго определенные значения. Оказалось, что сталкивающиеся атомы образуют на ничтожную долю секунды систему, похожую на молекулу. И хотя такая «молекула» существует очень короткое время ($\sim 10^{-15}$ *с*), за это время в электронных оболочках ее атомов происходит глубокая перестройка, приводящая к потере многих электронов. Немало таких неожиданных новых физических явлений обнаружилось в ходе экспериментов.

Знание механизма элементарных актов неупругих соударений имеет огромное значение для радиоэлектроники, изучения процессов, происходящих в газовых лазерах, магнитогидродинамических генераторах, а также в атмосфере Земли и далеких космических просторах. Оно представляет большую ценность для развития химии высоких температур и решения проблемы управляемых термоядерных реакций. В частности, благодаря описанным выше исследованиям удалось создать метод надежного определения основных характеристик горячей плазмы — так называемую «корпускулярную диагностику» плазмы.

Третья Ленинская премия за работы в области физики присуждена академику АН УССР Алексею Зиновьевичу Петрову за цикл работ *«Инвариантно-групповые методы в теории гравитации»*.

Бурное развитие представлений о природе Вселенной, связанное с созданием новых областей астрономии (радиоастрономии, рентгеновской астрономии и т. п.), а также с прорывом человечества в Космос, чрезвычайно обострило интерес к проблемам гравитации. Эти проблемы изучаются общей теорией относительности, которую часто называют теорией пространства, времени и тяготения. Общая теория относительности чрезвычайно углубила наши представления о природе пространства, времени и тяготения и их взаимной связи. Она показала, что тяжелые тела своим притяжением искривляют окружающее их пространство, подобно тому, как камень прогибает натянутое полотно, на котором он лежит. Тяжелые тела замедляют ход времени в своих окрестностях.

Общая теория относительности еще весьма далека от завершения и продолжает успешно развиваться в наши дни.

Очень существенный вклад в развитие этой теории внесли работы А. З. Петрова. Его основные научные достижения сконцентрированы в двух монографиях: «Пространства Эйнштейна» и «Новые методы в общей теории относительности». В первой работе А. З. Петров рассмотрел все возможные варианты полей тяготения (различные виды искривления пространства тяжелыми телами), допускаемые общей теорией относительности, и создал их строгую математическую классификацию. При этом ему удалось найти новые решения основного уравнения этой теории.

Во второй работе А. З. Петров исследовал допустимые виды симметрии различных полей тяготения. С этими видами симметрии связаны законы сохранения различных физических величин. Благодаря исследованиям А. З. Петрова мы знаем теперь, какие из законов сохранения имеют место в системах с разными полями тяготения.

Ленинской премии удостоены также многолетние исследования одного из крупнейших советских математиков академика Ивана Матвеевича Виноградова, подытоженные в монографии *«Метод тригонометрических сумм в теории чисел»*. На основе этого метода, предложенного и обоснованного И. М. Виноградовым, удалось получить много важных результатов, относящихся к распределению простых чисел. Например, удалось решить проблему Гольдбаха о возможности представления нечетных чисел в виде суммы трех простых чисел. Эта проблема не имела своего решения в течение двух веков.

Метод, разработанный И. М. Виноградовым, позволил сделать много фундаментальных выводов не только в аналитической теории чисел, но и в теории функций, теории вероятностей, математическом анализе и приближенных вычислениях.

В. А. Лешковцев

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ИЗОБРЕТАТЕЛЯМ «РУССКОГО СВЕТА»

В этом году исполняется 125 лет со дня рождения двух замечательных русских электротехников-изобретателей П. Н. Яблочкова (1847—1894) и А. Н. Лодыгина (1847—1923).

Еще в 1823 году русский физик Владимир Васильевич Петров впервые описал открытое им «световое явление» — электрическую дугу между двумя углями, дающую «весьма яркого цвета свет и пламя», от которого «темный покой довольно ясно освещен быть может».

Однако в то время практического применения для освещения дуга Петрова не получила, так как для ее нормального горения требовалось непрерывное наблюдение за углями. Кто-то должен был все время управлять этим светом, сближать угли по мере их сгорания.

Впервые в 1875 году создал пригодную для практического использования «электрическую свечу» Павел Николаевич Яблочков, портрет которого вы видите на марке, выпущенной в 1951 году в серии «Ученые нашей Родины».

Справа от портрета изображена «свеча». Это два вертикально поставленных угля, разделенных глиняной обмуровкой, способной сгорать с такой же скоростью, как и угли. Получился источник электрического света, не требующий специального обслуживания и регулирования. Верхние концы углей соединялись тонкой запальной пластинкой. При включении тока пластинка накалялась и сгорала, зажигая свечу. Свеча давала ровный и устойчивый свет в течение почти двух часов.

Парижские и лондонские газеты и журналы восторженно писали: «Русским светом» ярко освещены теперь театр Татле, магазины Лувра, площадь Оперы в Париже, порт в Гавре, набережная Темзы в Лондоне, столичные цирки. В одном только Париже тысяча «русских свечей» вытеснила с улиц 70 тысяч газовых рожков».

В Петербурге «свечи Яблочкова» начали использоваться для освещения только в 1879 году. Однако они уже были обречены, так как другим выдающимся русским электротехником Александром Николаевичем Лодыгиным, портрет которого вы видите на марке из той же серии, была создана более удобная, чем «свеча», электрическая лампа накаливания. Эта первая в мире лампа накаливания изображена на марке справа от портрета.

В лампе А. Н. Лодыгина электрический ток накаливал тонкий угольный стержень, помещенный под стеклянным колпаком. Срок службы первых ламп был 30—40 минут. После применения вакуума и других усовершенствований срок службы ламп был доведен до 700—1000 часов.

В 1890-х годах Лодыгин первый создал лампы накаливания с металлическими нитями, в частности, вольфрамовыми. Эти лампы оказались значительно экономичней, чем лампы с угольными волосками.

П. Н. Яблочкову и А. Н. Лодыгину принадлежит еще ряд трудов по электротехнике, однако основная их заслуга в том, что они первые в мире осуществили практическое применение электричества для освещения.

А. В. Литвинас

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Интеграл»

(см. «Квант» № 9, стр. 2)

1. Пусть c — любое число из отрезка $[a, b]$. В роли F можно взять функцию

$$F(x)=\begin{cases} T[c,x], & \text{если } x>c;\\ 0, & \text{если } x=c;\\ T[x,c], & \text{если } x<c.\end{cases}$$

Можно показать, что функция F определяется условием $\Delta F=T$ с точностью до прибавления к ней произвольной постоянной.

3. На любом отрезке $[-\alpha, \alpha]$, где $\alpha>0$

$$\Delta H[-\alpha,\alpha]=1.$$

Если бы нужная функция — «плотность» δ — существовала, то должно было выполняться неравенство

$$\max_{[-\alpha,\alpha]}\delta\geqslant\frac{1}{2\alpha}.$$

В то же время в физике оказалось очень удобно рассматривать «плотность» δ функций промежутка даже в тех случаях, когда настоящих ограниченных функций f не существует. Возникла целая новая математическая теория «обобщенных функций», а «обобщенная плотность» для функции H получила даже специальное название — «δ-функция Дирака»

4. Поскольку на любом отрезке $[a, b]$ (при $a\neq b$) встречаются как рациональные, так и иррациональные числа, то наименьшее значение функции Дирихле на любом таком отрезке равно 0, а наибольшее — 1. Пусть теперь α — произвольное число из отрезка $[0,1]$.

Определим функцию промежутка T по закону:

$$T[a,b]=\alpha(b-a).$$

Эта функция промежутка аддитивна:

$$T[a,b]+T[b,c]=\alpha(b-a)+\alpha(c-b)=\alpha(c-a)=T[a,c].$$

Средняя плотность функции T на любом отрезке равна α и заключена между числами 0 и 1, то есть между наименьшим и наибольшим значениями функции Дирихле на этом отрезке. Выбирая различные значения α, мы будем получать разные аддитивные функции промежутка, удовлетворяющие неравенствам с одной и той же функцией f — функцией Дирихле.

5. а) 1-й способ.

$$\int_{-2}^{1}(x-1)^3dx=\int_{-2}^{1}(x^3-3x^2+3x-1)dx=$$
$$=\int_{-2}^{1}x^3dx-3\int_{-2}^{1}x^2dx+3\int_{-2}^{1}x\,dx-$$
$$-\int_{-2}^{1}1\,dx=\frac{1^4-(-2)^4}{4}-$$
$$-3\,\frac{1^3-(-2)^3}{3}+3\,\frac{1^2-(-2)^2}{2}-$$
$$-(1-(-2))=-\frac{81}{4}$$

(использовались формулы (7), (8) и (6)).

2-й способ.

$$\int_{-2}^{1}(x-1)^3dx=\int_{-3}^{0}x^3dx=$$
$$=\frac{0^4-(-3)^4}{4}=-\frac{81}{4}$$

(использовались формулы (10) и (6)).

б) $$\int_a^b\sin x\,dx=\int_a^b\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=$$
$$=\int_{\pi/2-b}^{\pi/2-a}\cos x dx=\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-$$
$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=\cos a-\cos b.$$

в) $$\int_a^b\cos^2xdx=\int_a^b\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^b dx+\frac{1}{2}\int_a^b\cos 2xdx=$$
$$=\frac{1}{2}(b-a)+\frac{1}{4}\int_{2a}^{2b}\cos xdx=$$
$$=\frac{1}{2}(b-a)+\frac{1}{4}(\sin 2b-\sin 2a).$$

г) $$\int_0^2|x-1|\,dx=\int_0^1|x-1|\,dx+\int_1^2|x-1|\,dx=$$
$$=\int_0^1(1-x)\,dx+\int_1^2(x-1)\,dx=$$
$$=\int_0^1dx-\int_0^1xdx+\int_1^2xdx-\int_1^2dx=1.$$

К статье «Интеграл в геометрии и физике»

1. а) $\int\limits_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$, б) $\int\limits_0^\pi \sin x dx = 2$.

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}$.

3. $\int\limits_0^\pi \pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}$.

4. Поскольку график вращается вокруг оси ординат, а не оси абсцисс, нужно от функции $x \to x^2$ перейти к обратной функции $x \to \sqrt{x}$. Поэтому нужно вычислить

$$\int\limits_0^1 \pi x dx = \frac{\pi}{2}.$$

5. Этот интеграл численно равен площади части плоскости между графиком функции $x \to \sqrt{1-x^2}$ и осью абсцисс над отрезком [0, 1]. Поэтому он равен четверти площади круга радиуса 1. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

6. $E = \int\limits_0^l \frac{M\omega^2x^2}{2l}\,dx = \frac{M\omega^2l^2}{6}$.

7. $Q = \int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I^2(t)\,R dt = \frac{\pi}{\omega} R I_0^2$.

К статье «Конечные паркеты»

1. Покажите, что в этом случае нам удастся покрыть вершину прямого угла.

2. Например, прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{2}$.

3. Для того, чтобы разрезать прямоугольник на $2k$ равных треугольников, разрежем его сначала на k равных прямоугольников параллельными прямыми.

4. Воспользуйтесь основным свойством разрезания.

5. Необходимо отдельно рассмотреть случаи равностороннего, прямоугольного с углами 30° и 60°, равнобедренного и произвольного треугольников.

6. В качестве примера можно взять $n=3$: $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=2-\sqrt{2}$, $a_3=2$.

9. Нужно подобрать соответствующий угол α для первого разреза.

10 и 11. Вспомните свойство высоты, опущенной из вершины прямого угла.

14. Разбив треугольник прямыми, параллельными основанию, на треугольник и трапеции, используйте возможность разбиения трапеций на нечетное число равных треугольников.

15. Покажите, что в данном случае разбиение совпадает с разрезанием и что полученные треугольники — прямоугольные.

17. Воспользуйтесь результатом задачи 14.

К статье «Метод решения задач» с конца»

1. В доказываемом равенстве уменьшить число параметров, выразив a через $в$.

5. Вычислить углы треугольника; воспользовавшись теоремой синусов, от доказываемого равенства перейти к тригонометрическому равенству.

6. В доказываемом неравенстве перейти к логарифму по основанию π. Учесть, что $\pi < 3{,}15$.

7. В неравенстве $S_{полн} \leqslant \frac{M^2}{24}$ удобно выразить все величины через ребра параллелепипеда.

8. Исходя из проверяемого соотношения, легко убедиться, что оно неверно.

Внесите необходимые изменения и докажите полученную теорему.

9. Следует еще указать на обратимость всех преобразований.

10. Нет.

К статье «Работа, энергия, мощность»

1. mv^2.

2. $\frac{1}{4}$.

3. $\sqrt{2gh}$.

К «Вариантам вступительных экзаменов по математике 1972 года»

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Химический факультет

(см. «Квант» № 9, стр. 50)

1. 6 *км/ч*. 2. $x=-1$.

3. $AM:MD=3:4$.

4. $\frac{1}{4}\sqrt{(b^2-a^2)(a^2+h^2)}$.

5. $\frac{2\pi}{3}k + \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}(k+1)$;

$x \neq \pm\frac{\pi}{2} + \pi n$

Географический факультет и почвенное отделение биолого-почвенного факультета
(см. «Квант» № 9, стр. 50)

1. 24 и 21.
2. $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$.
3. $0<x<1/2$, $1<x<32$.
4. $x=2$, $y=2$.
5. $\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}+8}-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$.

Биологическое отделение биолого-почвенного факультета
(см. «Квант» № 9, стр. 50)

1. За 2 часа.
2. 1.
3. $x=1/3$.
4. $x_1 = \frac{k}{2}$, $k=1, 3, 4, 5, \ldots$

   $x_2 = \frac{1}{4} + m$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$
5. $\frac{(a+c)(b+c)(a+b+c)}{ab(a+b+2c)}$.

Отделение общей геологии геологического факультета

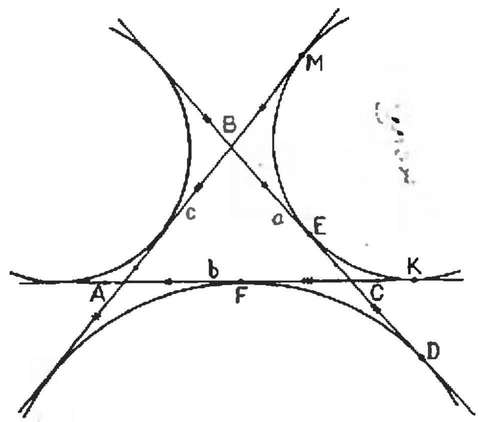
1. $-1^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi$;
2. $x=4$, $y=5$;
3. 6 *км/час*;
4. $x<2$;
5. $\frac{5\cdot\sqrt{6}}{2}$.

Отделение геофизики геологического факультета

1. 15;
2. $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$;
3. $x<-1$, $\frac{\sqrt{13}-3}{2}<x<2$;
4. $\frac{7}{5}$;
5. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; $\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$.

К «Геометрической задаче»
(см. стр. 22)

При доказательстве будем использовать только следующее, хорошо известное свойство: две касательные, проведенные из внешней точки к окружности, равны.



Отсюда $AM=AK$, $BM=BE$, $CE=CK$, $AB+BM=AC+CK$, $AB+BE=AC+CE$, но $(AB+BE)+(AC+CE)=2p$, $AB+BE=AC+CE=p$. Остается отметить на рисунке равные отрезки.

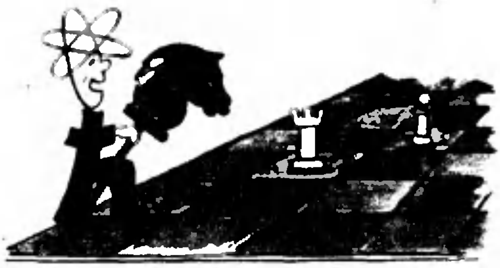
«Квант» для младших школьников»
(см. «Квант» № 9, 3-я стр. обл.)

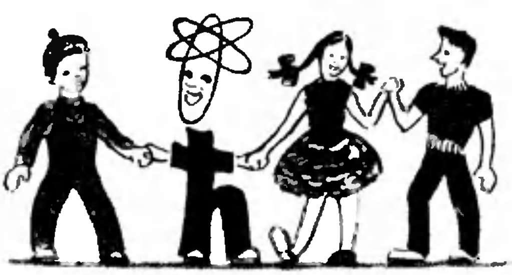
1. $m=3$, $n=4$, $p=5$, $q=6$*).
2. 72.
3. $22+979=1001$.
4. 437.
5. $\frac{1}{2}$, -1.
6. В тот год сестра родилась.
7. $21978\times4=87912$.

---

*) Задача была составлена в 1971 году.

КВАНТ для младших школьников





1. На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, пришельцы — всегда лгут. Путешественник нанял туземца-островитянина в проводники. Они пошли и увидели другого островитянина. Путешественник послал проводника узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал, что тот говорит, что он — абориген.

Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?

2. Можно ли ходом коня попасть из левой нижней клетки шахматной доски в правую верхнюю клетку, побывав при этом на каждой клетке один и только один раз?

3. Кончилась Великая Отечественная война. Как-то повстречались два товарища. Разговорились.

— Давненько мы с тобой не виделись. Сколько же теперь лет твоему сыну? — спросил один.

— Знаешь, любопытнейшая игра чисел, — ответил второй. Сын мой родился в том самом году, который был точным квадратом моего возраста в год его рождения. А сейчас ему столько лет, сколько составляет сумма цифр года моего рождения.

Сколько лет отцу-математику?

4. Доказать, что из всех людей, живших когда-либо на свете и живущих сейчас, число людей, сделавших в течение всей своей жизни нечетное число рукопожатий, есть число четное.

5. $\overline{abcd} : \overline{dcba} = q.$

Делимое, делитель и частное — точные квадраты. Найти их.

Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

Квант 10

К нашим читателям!

Продолжается подписка на 1973 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан в первую очередь на учеников 7—10 классов. Он полезен также учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия по физике или математике, а также всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа», материалы, помогающие лучше понять физику и математику, применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателям поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука», как появляются научные открытия.

Постоянно помещаются рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал распространяется только по подписке и в розничную продажу не поступает.

Цена номера 30 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.